



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MESSINA

Dipartimento di Ingegneria

Dottorato di Ricerca in

INGEGNERIA CIVILE, AMBIENTALE E DELLA SICUREZZA

XXXVI CICLO - Curriculum Infrastrutture

S.S.D.: ICAR/08

**IL CONTROLLO DELLE VIBRAZIONI DI
INFRASTRUTTURE**

Dottorando:

Dott. Ing. Silvia Sciutteri

Coordinatore:

Prof. Ing. Gaetano Bosurgi

Tutor:

Prof. Ing. Giuseppe Faila

Co-Tutor:

Prof. Ing. Giuseppe Ricciardi

A.A. 2022-2023

Licenza



Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale

Sommario

CONSIDERAZIONI INTRODUTTIVE	1
1° CAPITOLO	3
SISTEMI DI CONTROLLO DELLE VIBRAZIONI	3
1.1. DISAMINA SUI SISTEMI DI CONTROLLO	3
1.2. DISPOSITIVI A MASSA ACCORDATA TMD	7
1.3. SISTEMA DI ISOLAMENTO ALLA BASE (BIS)	13
1.4. CRITICITÀ DEI SISTEMI DI CONTROLLO DELLE VIBRAZIONI.	17
1.5. SINOSI	18
2° CAPITOLO	19
IL DISPOSITIVO INERTER NEL CONTROLLO DELLE VIBRAZIONI	19
2.1. INTRODUZIONE	19
2.2. IDEAZIONE E FUNZIONAMENTO DELL'INERTER	20
2.3. TIPOLOGIE DI INERTER	22
2.3.1. BALL-SCREW INERTER	23
2.3.2. RACK AND PINION INERTER	24
2.3.3. INERTER IDRAULICO	25
2.3.4. INERTER A FLUIDO ELICOIDALE	26
2.3.5. INERTER ELETTROMAGNETICO	28
2.3.6. INERTER LIVING HINGE	28
2.4. L'UTILIZZO DELL'INERTER NEI SISTEMI DI CONTROLLO DELLE VIBRAZIONI	29
2.4.1. GENERALITÀ	29
2.4.2. L'INERTER IN AGGIUNTA AL TMD	31
2.4.3. L'INERTER IN AGGIUNTA AL SISTEMA DI ISOLAMENTO	35
2.5. COMPLESSITÀ E CRITICITÀ	38
2.3. SINOSI	40

4.1. LA TECNICA DELL'ISOLAMENTO NEI PONTI	121
4.2. PONTE A TRAVATA CONTINUA SOGGETTO A SISMA LONGITUDINALE: TMDI SU SPALLA	124
4.2.1. EQUAZIONI DEL MOTO DEL MODELLO	125
4.2.2. INDAGINI NUMERICHE	135
4.2.2.1. STEP 1: calcolo del ponte isolato	138
4.2.2.2. STEP 2: calcolo del ponte con isolamento + TDI sulla spalla	142
4.2.2.3. STEP 3: confronto tra i risultati e commenti	144
4.2.2.4. PILA 40 m: analisi dinamica deterministica	149
4.3. PONTE A TRAVATA CONTINUA SOGGETTO A SISMA TRASVERSALE: TMDI SU PILA	154
4.3.1. EQUAZIONI DEL MOTO DEL MODELLO	155
4.3.2. INDAGINI NUMERICHE	159
4.3.2.1. STEP 1: calcolo del ponte isolato	160
4.3.2.2. STEP 2: calcolo del ponte con isolamento + TDI su pila	161
4.3.2.3. STEP 3: confronto tra i risultati e commenti	162
4.4. SINOSSI	165
CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE	169
APPENDICE: CENNI DI TEORIA DEI PROCESSI ALEATORI	173
RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI	191

CONSIDERAZIONI INTRODUTTIVE

La presente tesi si inserisce nell'ambito del vasto problema del controllo delle vibrazioni delle infrastrutture, con uno studio mirato su alcuni dei dispositivi di controllo passivi classicamente in uso. Partendo da una disamina dei due sistemi più utilizzati dall'ingegneria civile quali il Tuned Mass Damper e il sistema di isolamento alla base, si indagano le basi del loro funzionamento per individuare le caratteristiche, i vantaggi e gli svantaggi della loro applicazione. Il TMD, infatti, per poter essere efficace, necessita di una massa fisica paragonabile a quella del sistema principale da proteggere e ciò implica numerosi problemi in termini di sicurezza per gli elementi strutturali; inoltre, non è sempre possibile installare un dispositivo di grandi dimensioni. Il sistema di isolamento invece, benché garantisca ottimi risultati in termini di riduzione delle sollecitazioni, provoca un incremento degli spostamenti che può essere contenuto introducendo in abbinamento al BIS un TMD, con i problemi sopracitati.

Per tutte queste motivazioni, l'inerter si inserisce nel panorama dei dispositivi di controllo delle vibrazioni come valido elemento in grado di garantire efficienza e compattezza, garantendo gli stessi risultati dell'applicazione di masse notevoli. La convenienza dell'utilizzo dell'inerter in combinazione con i sistemi tradizionali sarà dimostrata in due appositi capitoli, il primo dei quali incentrato sullo studio dell'impiego dell'inerter all'interno dei supporti localmente risonanti nell'analisi del controllo delle vibrazioni di sistemi di condotte, il secondo invece studia i vantaggi dell'utilizzo dell'inerter per la protezione delle infrastrutture da ponte soggette ad azioni sismiche sia longitudinali che trasversali.

SISTEMI DI CONTROLLO DELLE VIBRAZIONI

1.1. DISAMINA SUI SISTEMI DI CONTROLLO

Negli ultimi decenni, l'urbanizzazione crescente ha portato ad un aumento del numero di strutture ed infrastrutture realizzate; nel lungo periodo, è stato osservato che le costruzioni manifestano danni strutturali e non, con conseguente decadimento delle prestazioni (Fatemeh R. et al., 2020). Oltre al degrado dovuto all'invecchiamento dei materiali e delle componenti, i danni più gravi vengono registrati quando strutture e infrastrutture sono soggette ad azioni esterne, quali ad esempio il vento ed i terremoti, che inducono vibrazioni notevoli. Le vibrazioni sono oscillazioni o movimenti periodici di un corpo, elastico o rigido, oppure di un mezzo che viene forzato da una certa posizione o condizione di equilibrio. Il controllo delle vibrazioni diventa fondamentale nell'ambito dell'ingegneria civile in quanto oscillazioni eccessive o non previste hanno effetti negativi, che possono spaziare da semplici condizioni di disagio fino a deformazioni, danneggiamenti e infine crolli. Garantire e mantenere le strutture e le infrastrutture in condizioni di sicurezza è una sfida ingegneristica che prevede l'utilizzo di dispositivi per il controllo delle vibrazioni (Palacios-Quiñonero F., et al., 2014), siano esse dovute a fenomeni naturali che causate dall'uomo. La corretta progettazione dei dispositivi ha come scopo il controllo efficace e come incognite la natura stocastica dell'eccitazione dinamica, le variabili relative alle forze di dissipazione e la scelta di un determinato approccio.

I dispositivi possono essere generalmente categorizzati in passivi, semiattivi, attivi e ibridi (Zuo H. et al., 2020). Sono state recentemente studiate numerose applicazioni di dispositivi attivi nell'ambito dell'ingegneria civile strutturale (Fisco N., Adeli H., 2011) soprattutto in caso di edifici alti, torri, e ponti a più campate. I dispositivi attivi, semi attivi e ibridi sono costituiti da sensori, grazie ai quali vengono immagazzinate e processate le informazioni circa il loro stato così che, in caso di bisogno, vengano azionati (Symans M.D., Constantinou M.C., 1999). È naturale che si stia tutt'ora studiando per cercare di ottimizzare ulteriormente l'efficienza e la controllabilità di questi sistemi, la cui progettazione si basa sulla formulazione di un algoritmo di controllo, lineare o non lineare a seconda della relazione tra la risposta misurata e il segnale (Pierre J.W. et al., 2012); in alcuni casi, utilizzare un approccio non lineare può risultare vantaggioso, ma generalmente si preferisce avvalersi di metodi di identificazione basati su leggi matematiche più rigorose. Vi sono diversi fattori che rendono a volte difficile garantire l'adattamento e la risposta del sistema strutturale, sia per cause esterne quali ad esempio l'entità del vento e il movimento del terreno dovuto al sisma, sia interne in quanto i parametri di stato del sistema hanno sempre una certa aleatorietà in riferimento alle modalità e alle tempistiche di invecchiamento strutturale (Karcianas N., 2008). L'algoritmo di controllo può utilizzare di misure dell'eccitazione, ed in questo caso si dice che opera in base al *feedforward*, oppure in relazione alla risposta strutturale ovvero al *feedback*, o ancora essere tarato per tenere conto di entrambe. Quando si progetta il sistema di controllo in funzione del *feedback*, i dispositivi si attivano se vi è un discostamento da un comportamento preimpostato, indipendentemente dalle caratteristiche e dal tipo di perturbazione; per progettare in *feedforward* invece, bisognerebbe tarare differentemente il comportamento del dispositivo in base alla risposta che si pensa si avrà per una determinata eccitazione. L'ultimo caso è ovviamente più complesso e strettamente legato all'accuratezza del modello di previsione.

I dispositivi passivi generano, invece, un controllo sulla risposta attivato dal movimento della struttura e pertanto non è necessario alimentarli esternamente. Le vibrazioni vengono ridotte dissipando l'energia cinetica sia per conversione in calore sia per trasmissione attraverso le vibrazioni dei dispositivi, con il notevole vantaggio che la forza di smorzamento cresce all'aumentare della risposta strutturale (Leung A.Y. et al., 2008). Per la loro semplicità di utilizzo e per l'indipendenza da fonti di energia esterne, in ambito di strutture civili vengono privilegiate le applicazioni di dispositivi di controllo passivi, (Gerges R.R., Vickery B.J., 2005 - Koo J.H. et al., 2008 - Fisco, N., H. Adeli, 2011 - Kim, H.S. et al., 2015) benché abbiano lo svantaggio di non riuscire ad adattarsi alle modifiche strutturali ed a condizioni di carico molto diverse tra loro (Asai T., 2020).

I dispositivi di tipo passivo possono essere suddivisi nelle seguenti categorie:

1. Dissipatori di energia (ED), i quali riducono le vibrazioni strutturali convertendo l'energia cinetica in calore. In funzione della modalità di dissipazione, si suddividono a loro volta in smorzatori metallici, smorzatori a frizione, smorzatori viscoelatici, smorzatori a fluido viscoso;
2. Assorbitori di vibrazioni dinamiche (DVAs), i quali riducono le vibrazioni trasferendo l'energia a sistemi secondari, comunemente smorzatori a massa accordata (TMD) oppure smorzatore a liquido sintonizzato (TLD);
3. Isolatori, i quali consentono di disaccoppiare la struttura dividendola in due sistemi: la sottostruttura di base e la sovrastruttura isolata (Asai T., 2014). In tal modo, la frequenza fondamentale del sistema isolato viene spostata lontano dalla frequenza dominante della perturbazione, attenuando le vibrazioni trasmesse.

L'equazione del moto di una struttura avente più gradi di libertà (MDOF) e soggetta a controllo delle vibrazioni di tipo attivo o passivo è la seguente:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{R}(\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t)) = \mathbf{E}(t) + \mathbf{B}\mathbf{f}(t) \quad (1.1)$$

In cui $\mathbf{x}(t)$, $\dot{\mathbf{x}}(t)$, $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ sono i vettori della risposta della struttura in termini di spostamento, velocità e accelerazione, \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} sono le matrici delle masse, di dissipazione e delle rigidità, $\mathbf{R}(\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t))$ è un termine che tiene conto di eventuali non linearità del sistema, $\mathbf{E}(t)$ è il vettore delle eccitazioni esterne agenti sulla struttura ed infine $\mathbf{f}(t)$ è la forza di controllo che il dispositivo esercita sul sistema, in base alla tipologia scelta, e \mathbf{B} è la matrice di localizzazione del sistema di controllo.

Nel caso in cui il sistema sia soggetto ad un controllo di tipo passivo, quando esso viene forzato dall'eccitazione esterna $\mathbf{E}(t)$, la struttura soggetta ad un dispositivo passivo produce una risposta controllata, come riportato schematicamente in **Fig. 1.1** (Wani Z.R. et al., 2022).

Nel caso in cui il sistema sia soggetto ad un controllo di tipo attivo, quando l'eccitazione forza il sistema, la struttura risponde e alcune caratteristiche della risposta vengono registrate dai trasduttori, che attivano il controller affinché gli attuatori del dispositivo attivo agiscano con una forza di controllo sulla struttura (**Fig. 1.2** da Wani Z.R. et al., 2022).

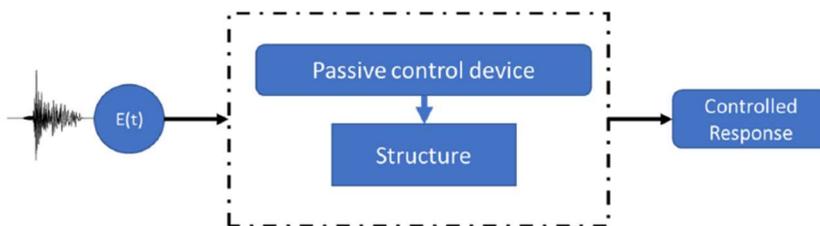


Fig. 1.1: Schematizzazione sistema di controllo di tipo passivo

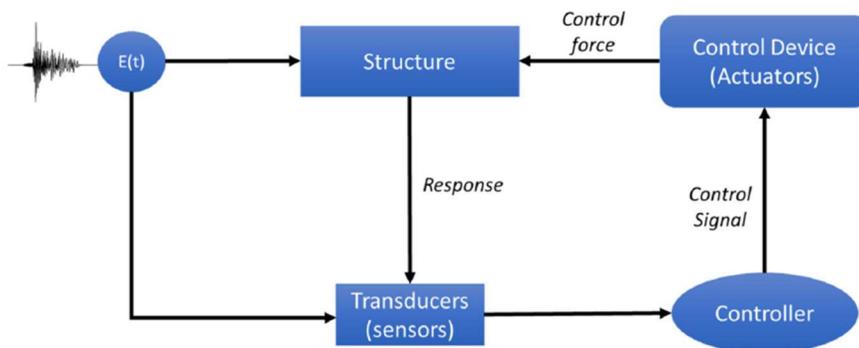


Fig. 1.2: Schematizzazione sistema di controllo di tipo attivo

Nell'ambito dello studio proposto, si vuole approfondire in particolare il comportamento dei risonatori a massa accordata (TMD) e dei sistemi di isolamento alla base (BIS).

1.2. DISPOSITIVI A MASSA ACCORDATA TMD

Nell'ingegneria sismica, il fine che si vuole raggiungere è quello di modificare la risposta delle parti sia strutturali che non strutturali del sistema, attraverso l'installazione di dispositivi di controllo. Gli smorzatori a massa accordata fanno parte dei dispositivi più diffusi ed utilizzati per il controllo delle vibrazioni; la caratteristica che li rende particolarmente idonei ad essere impiegati nella pratica è sicuramente la semplicità di utilizzo e di progettazione. Difatti, soprattutto se applicato su edifici esistenti, sono necessarie solo modeste modifiche del sistema strutturale e per questa ragione è stato diffusamente utilizzato per il controllo passivo delle vibrazioni di strutture edili dagli anni '70 (Cheng, F.Y. et al., 2008).

Indubbiamente, affinché il controllo della struttura avvenga con successo è necessario che vengano rispettati dei parametri durante la progettazione, pena non soltanto l'inefficacia dei dispositivi ma anche un peggioramento della risposta.

I fattori da considerare in fase di *design* del TMD sono:

- le caratteristiche modali sia della struttura che dello smorzatore, la cui variazione comporta delle differenze significative della risposta;
- il rapporto di massa: solitamente, il TMD è più preformante quando vi è un elevato rapporto di massa tra il dispositivo e la struttura primaria, tuttavia spesso non è fattibile utilizzare massa ingenti per problemi tecnologici ed economici;
- l'algoritmo di controllo del TMD deve essere scelto in modo tale da adattare le caratteristiche del dispositivo alle forze esterne previste e pertanto è necessaria una certa attenzione nella progettazione e nell'implementazione;
- il punto di installazione del dispositivo;
- la frequenza di sintonizzazione del dispositivo, caratteristica fondamentale per la determinazione delle prestazioni del sistema di controllo;
- l'interazione suolo-struttura è uno dei fattori che influenza la progettazione (Wolf J., Hall W., 1989) soprattutto nel caso di edifici alti, in quanto trascurare tale aspetto porta invariabilmente alla sovrastima delle prestazioni del dispositivo TMD (Wu, J. et al., 1999). Ciò è dovuto al fatto che il periodo naturale del sistema è più grande nel caso in cui si tenga in considerazione l'interazione terreno-struttura, e ne risultano modificati altresì i rapporti di smorzamento e le forze modali, con variazioni di rigidità e del meccanismo con cui l'energia viene dissipata;
- il comportamento non lineare; anche se usualmente si considera il TMD avente comportamento elastico, vi sono degli studi che tengono in considerazione il fatto che con terremoti di una certa intensità viene superato tale limite (Gerges, R.R., Vickery B.J, 2004 – Rustighi E. et al., 2005 - Rüdinger, F, 2006).

Nella sua configurazione, schematizzata in **Fig. 1.3** (Yao, Z., Zhang J., 2013) il TMD è costituito da una massa m , una molla con rigidezza k ed uno smorzatore con coefficiente di smorzamento c , collegato alla struttura principale avente le sue caratteristiche M, K, c' .

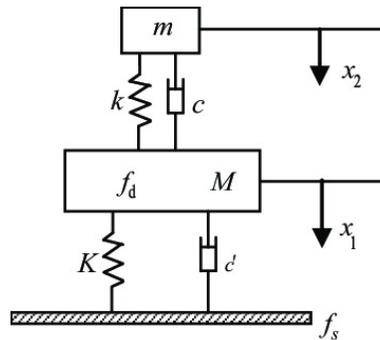


Fig. 1.3: schematizzazione TMD aggiunto alla struttura principale

Il TMD viene opportunamente sintonizzato per risuonare alla stessa frequenza della struttura principale ma in opposizione di fase, in modo tale da generare una forza opposta all'azione forzante e le caratteristiche dinamiche della struttura cambiano: l'energia si dissipa mediante un ciclo di isteresi crescente. Il controllo delle vibrazioni avviene mediante il meccanismo di trasmissione dell'energia di vibrazione dalla struttura al TMD. Se il TMD ha una sola massa, viene sintonizzato con la frequenza fondamentale della struttura e si attiverà solo per determinate sollecitazioni; è anche possibile utilizzare dei dispositivi multipli MTMD, nei quali la presenza di più masse consente di proteggere il sistema anche nei modi successivi al primo (Xu, K., Igusa T., 1992). I MTMD possono essere collegati alla struttura principale in serie oppure in parallelo, come mostrato in **Fig. 1.4** (Domizio M. et al., 2022).

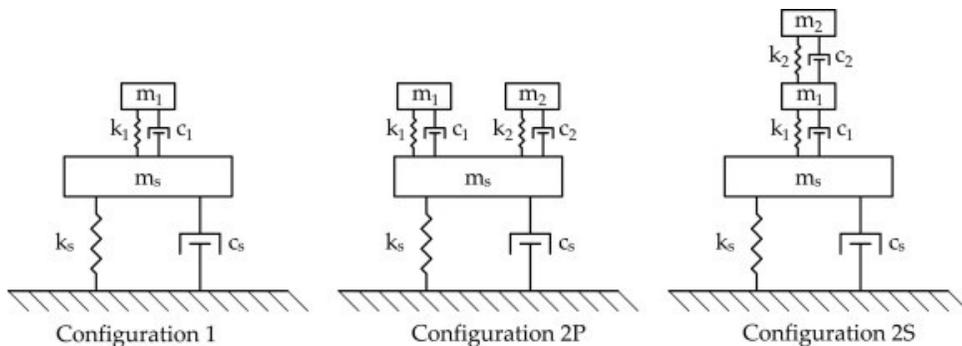


Fig. 1.4: configurazioni del TMD singolo oppure multiplo in parallelo e in serie

Avere un TMD multiplo è utile anche per affrontare il problema dell'incertezza della frequenza dominante della struttura, che rispetto al modello analitico e teorico può sempre subire variazioni per problematiche in fase di costruzione oppure in seguito a danneggiamenti o all'invecchiamento dei materiali; in questo caso, avere una serie di TMD più piccoli sintonizzati a frequenze vicine (Igusa T., Xu K., 1994) consente di ottenere frequenze naturali distribuite intorno alla frequenza dominante della struttura, garantendo così maggiori certezze che il sistema si attiverà in caso di sollecitazioni vicine in frequenza alla frequenza propria della struttura primaria. Inoltre, un vantaggio non indifferente di utilizzare più TMD è legato al fatto che è possibile proteggere la struttura dai terremoti che hanno un contenuto energetico rilevante a diverse frequenze, anche discretamente distanti tra loro. Naturalmente, avere più TMD anche se più piccoli implica ugualmente determinati costi di produzione ed installazione, problemi di locazione per la numerosità (Suresh L., Mini K., 2019) e per la realizzazione di masse che possono risultare in ogni caso non indifferenti.

Addentrando specificatamente nell'ambito di dispositivi nati da modifiche al classico TMD, vi sono in letteratura diversi esempi di sottosistemi che nascono con l'obiettivo di eludere alcune delle limitazioni dell'applicazione dei dispositivi a massa accordata o prevenire delle problematiche che sono state osservate successivamente alla loro installazione durante la vita utile della struttura. Ad esempio, è possibile avvalersi di dispositivi come i Nonlinear Energy

Sinks (NES), formalmente simili al TMD in quanto costituiti da uno smorzatore, una massa ed una molla ma con la sostanziale differenza che la molla installata ha un comportamento non lineare. Grazie a questa caratteristica, i NES coprono una banda di frequenze più ampia riuscendo pertanto a proteggere la struttura sia per un numero di modi di vibrare superiore sia nel caso in cui, a causa ad esempio di danneggiamenti strutturali, le frequenze proprie della struttura subiscano variazioni (Oliva M. et al., 2020). Nell'ambito dei TMD multipli si parla invece ad esempio di Composite Tuned Mass Damper (CTMD) Composite Tuned Mass Damper CTMD (Nishimura I. et al., 1998 – Lewandowski R. and Grzymislawska J., 2003 – Li C. and Zhu B., 2006 – Li C., 2006 - Zuo, 2009 – Stancioiu D. and Ouyang H., 2012) quando gli elementi sono in serie oppure del Distributed Tuned Mass Damper DTMD (Manikanahally D.N. and Crocker M.J., 1991 – Xu K. and Igusa T., 1992 - Igusa T. and Xu K., 1994 - Li C. and Liu Y., 2003 – Hoang N. and Warnitchai P., 2005 – Zuo L. and Nayfeh S.A., 2005 - Li H.N. and Ni X.L., 2007) quando gli elementi sono in parallelo. Altre configurazioni possibili riguardano ad esempio la realizzazione di TMD a più gradi di libertà (Zuo L. and Nayfeh S.A., 2004), dispositivi in cui si interviene sulle rigidità e/o sugli smorzatori: si possono avere due molle collegate in serie che manifestano un comportamento non lineare per configurazione, uno smorzatore aggiuntivo che collega il TMD al suolo oppure smorzatori viscosi (Anh N.D. et al., 2013 – Alexander N.A. and Schider F., 2009 - Ikago K. et al., 2012 - Garrido H. et al., 2013 – Ren M.Z., 2001 – Wong W.O. and Cheung Y.L., 2008 – Marian L. and Giaralis A., 2014). Altre tipologie di TMD riguardano variazioni che si applicano sulla massa: può essere sostituita, soprattutto per le installazioni sui tetti degli edifici, da una colonna d'acqua nel Tuned Liquid Damper TLD (Yu J. K. et al., 1999 - Banerji P. et al., 2000 – Mondal J. et al., 2014), oppure da un pendolo nel Pendulum Tuned Mass Damper (Chung L.L. et al., 2013 - Wang L. et al., 2019 – Garcia V.J. et al., 2021). Le configurazioni sopracitate possono altresì essere combinate tra loro (Li C. and Zhu B., 2006) per essere utilizzate simultaneamente.

Una delle applicazioni che vede l'impiego di un numero n di TMD, o più semplicemente di smorzatori massa-molla, riguarda i sistemi periodici per geometria ed in particolare modo tutti quei sistemi che si sviluppano in lunghezza e che possono essere assimilati all'elemento trave o piastra, poggianti su un certo numero di supporti massa-molla dislocati alla stessa distanza l'uno dall'altro. I supporti si comportano come smorzatori a massa accordata e vengono sintonizzati per risuonare tutti alla stessa frequenza e per questo motivo prendono il nome di risonatori. Nei capitoli successivi si parlerà approfonditamente di come controllare le vibrazioni di condotte da fluido poggianti su supporti risonanti, andando ad ottimizzare le prestazioni degli smorzatori accordati.

Le restrizioni cui è soggetto il TMD di tipo passivo hanno portato all'ideazione di TMD semi attivi, attivi o ibridi, grazie ai quali si ha un miglioramento delle prestazioni anche nel caso di variazione della frequenza fondamentale del sistema, riducendo il rischio di desintonizzazione del dispositivo; questo perché il TMD attivo non lavora sintonizzandosi ad una certa frequenza, ma in base ad una certa misura della risposta del sistema rilevata dai sensori. Tuttavia, si aggiungono in questo caso tutte le problematiche legate alla dipendenza dall'utilizzo dei sensori e dalla necessità di utilizzare energia elettrica o batterie per il suo funzionamento, oltre ad avere un rilevante aumento dei costi di manutenzione.

Tra le applicazioni meritevoli di menzione, soprattutto considerando gli studi condotti di cui si parlerà nei capitoli successivi, si vuole riportare che è stato anche studiato l'effetto dell'installazione dei TMD nelle infrastrutture da ponte (Das A., Dey S., 1992), concludendo che la frequenza propria della struttura e la collocazione del TMD sono i due fattori che influenzano maggiormente le prestazioni dei dispositivi. Il comportamento di ponti lunghi soggetti a vibrazioni dovute al vento è stato studiato nel caso di TMD singolo (Gu M., Xiang H., 1992) o multiplo (Lin Y.Y. et al., 2000), per trovare i parametri ottimali del dispositivo

e ottenendo come risultato una mitigazione della risposta del ponte ai fenomeni di buffering grazie al TMD (Pourzeynali S., Datta T., 2002).

Infine, si riporta come sia stato proposto (Hoang N. et al., 2008) di utilizzare in combinazione il TMD con il sistema di isolamento alla base in un impalcato da ponte, trovando dei risultati abbastanza convenienti in termini di riduzione della risposta quando si utilizzano rapporti di massa importanti.

1.3. SISTEMA DI ISOLAMENTO ALLA BASE (BIS)

Il sistema di isolamento alla base viene ampiamente utilizzato per proteggere le parti strutturali e non strutturali dai rischi dovuti all'evento sismico. L'analisi dei danni causati da numerosi terremoti su strutture di diverse tipologie e fondate su terreni anche molto diversi tra loro, ha consentito di studiare differenti tecniche di protezione sismica (Patil S.J., Reddy G.R., 2012). Le strategie che si basano sull'impiego di isolatori hanno iniziato a diffondersi già negli anni '20 e numerosi Paesi, quali Stati Uniti, Nuova Zelanda, Cina e Giappone sono tra i pionieri nell'utilizzo di questa tipologia e la impiegano regolarmente per proteggere edifici pubblici e residenziali, forti della consapevolezza che una struttura isolata manifesta una risposta ridotta anche oltre il 50% rispetto alle strutture costruite con tecniche tradizionali. Un iniziale investimento nell'impiego degli isolatori può parzialmente o totalmente rientrare grazie al fatto che la sovrastruttura riceverà forze sismiche nettamente inferiori con conseguente revisione del dimensionamento degli elementi strutturali, in quanto la resistenza della struttura viene adattata per resistere a forze minori. Una struttura più snella implica costi di costruzione più bassi, inoltre non vi saranno più escursioni della sovrastruttura in campo plastico: la sovrastruttura viene progettata in campo elastico. Il risultato ottenuto è di fondamentale importanza in quanto, soprattutto per gli edifici strategici, la permanenza in campo elastico consente alla struttura di rimanere operativa e funzionale anche durante l'emergenza sisma.

Oltre a poter essere utilizzati in fase progettuale, attingendo ad una concezione innovativa del comportamento della struttura, gli isolatori possono, e dovrebbero, essere impiegati anche su strutture esistenti (Zhou F.L et al., 2004). La filosofia della progettazione con isolamento alla base si fonda sul disaccoppiare la struttura in elevazione, detta sovrastruttura, dalla sottostruttura soggetta a movimenti del terreno indotti dal sisma, interponendo tra le due parti gli isolatori: la sovrastruttura riceverà un'accelerazione sismica orizzontale inferiore.

Indipendentemente dal caso specifico, il sistema di isolamento ha come caratteristiche la flessibilità e la capacità di assorbire l'energia; così operando, il periodo fondamentale della struttura si sposta lontano dal range di frequenze energetiche che dominano il terremoto di progetto.

La tipologia di isolatori maggiormente impiegata è quella con cuscinetti in gomma laminata (LRB) in cui sono alternativamente sovrapposti strati di gomma e di piastre in acciaio; la conformazione garantisce un'elevata flessibilità orizzontale contestualmente ad una grande rigidità verticale e si hanno smorzamento e frequenza naturale costanti. Oltre alla notevole riduzione della risposta della struttura, ulteriori vantaggi del sistema di isolamento sono ad esempio l'operatività garantita per lungo tempo, la capacità di recuperare gli spostamenti dovuti al terremoto grazie alla capacità di ricentraggio a patto che non vengano superati gli spostamenti limite del singolo dispositivo, una buona resistenza ai carichi verticali ed inoltre si riduce lo stress termico dovuto a grandi sbalzi di temperatura, in quanto le deformazioni si concentrano sui cuscinetti. Uno dei problemi del sistema di isolamento riguarda l'aumento degli spostamenti orizzontali dovuti all'incremento di flessibilità del sistema, parzialmente risolto grazie all'inserimento di un nucleo in piombo all'interno degli isolatori e che funziona come uno smorzatore isteretico, riducendo lo spostamento dell'isolatore. Il comportamento del dispositivo è riportato in **Fig. 1.5** (Patil S.J., Reddy G.R., 2012).

Ovviamente, nel tempo sono state proposte sempre nuove tipologie di isolatori con diversi materiali elastomerici e proprietà che ne aumentano le capacità di dissipazione; una tipologia un po' diversa e molto diffusa è l'isolatore *friction pendulum system* (FPS), che sfrutta la teoria del pendolo per attivarsi anche in caso di piccoli spostamenti e dissipa grazie all'attrito. Si riportano in **Fig. 1.6** (De Domenico D. et al. 2019) una rappresentazione dell'isolatore a pendolo e della risposta in termini di diagramma forza-spostamenti.

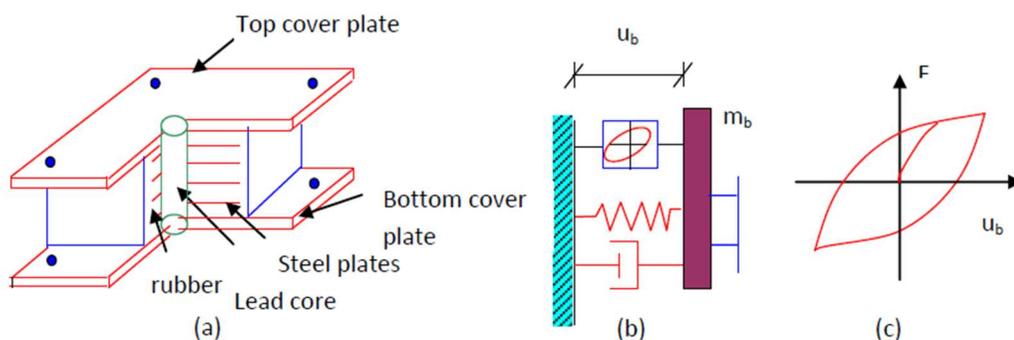


Fig. 1.5: isolatore con nucleo in piombo (a), schema di funzionamento (b) e diagramma deformazione-forza

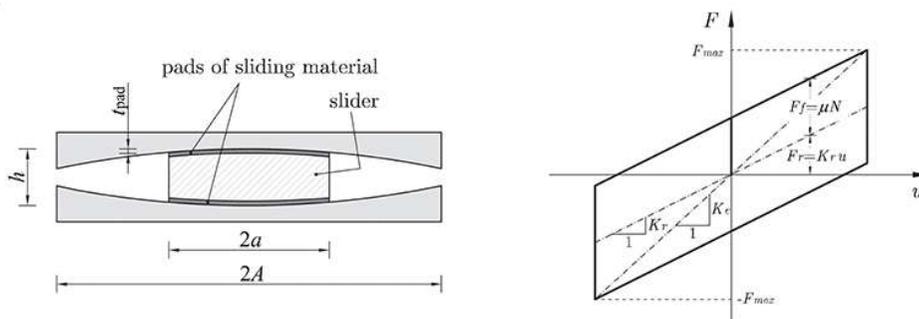


Fig. 1.6: schematizzazione isolatore a pendolo e risposta in termini di diagramma spostamento-forza

Le strategie di protezione sismica basate sull'isolamento, grazie al grande vantaggio di proteggere la sovrastruttura da danni e deformazioni plastiche che ne possono compromettere sia il funzionamento che la sicurezza, sono state utilizzate per edifici, ponti ed anche impianti industriali. A fronte dei numerosi benefici del sistema di isolamento, l'aumento degli spostamenti dovuto all'incremento di flessibilità può causare diversi problemi, quali ad esempio porre

una certa attenzione nel dimensionamento e nella progettazione dei dispositivi, dei collegamenti e degli impianti a rischio rottura; inoltre, grandi spostamenti della struttura in elevazione possono non essere accettabili se vi è il rischio di martellamento sugli edifici adiacenti (Anagnostopoulos S.A, Spiliopoulos K.V., 1992).

Per ridurre gli spostamenti dovuti all'isolamento del sistema, di frequente vengono abbinati gli isolatori ed i TMD (Yang J.N., et al.,1991 - Tsai HC., 1995 - Taniguchi T. et al., 2008 - Hashimoto T. et al., 2015). In questo caso il TMD viene applicato sopra o sotto il sistema di isolamento; quindi, vicino al suolo perché è alla base che in questo caso ci si aspetta avvengano gli spostamenti maggiori, mentre usualmente il TMD è impiegato, da solo, ai piani più alti (Takewaki I., 2000), dove sono attesi i massimi spostamenti relativi. L'effetto dell'abbinamento del TMD con il BIS è stato valutato in diversi studi teorici, ma anche in casi reali come l'edificio in cemento armato studiato da De Domenico D. e Ricciardi G. (2018) in cui lungo tutto il perimetro dell'edificio sono posizionati gli isolatori mentre al centro, nel piano interrato, è installato un grande TMD in cui la massa è realizzata da una scatola piena di calcestruzzo, collegato al BIS tramite ulteriori isolatori ausiliari. Ovviamente è stato studiato come ottimizzare il sistema combinato per essere pienamente efficace, confrontando la risposta della stessa struttura a base fissa, nella quale i danni si concentravano nelle cerniere plastiche alle estremità delle travi ovvero con danneggiamenti strutturali permanenti, con la struttura isolata in cui il danno si concentra nei dispositivi, sostituibili dopo il sisma, mentre la sovrastruttura rimane protetta in campo elastico, e con la struttura con isolamento e TMD. Nel caso di sistema combinato, le sollecitazioni sulle colonne sono inferiori anche alla riduzione registrata dall'applicazione del solo isolamento, inoltre vi è un grande vantaggio in termini di riduzione degli spostamenti della struttura e degli stessi isolatori.

1.4. CRITICITÀ DEI SISTEMI DI CONTROLLO DELLE VIBRAZIONI.

L'utilizzo dei dispositivi sopracitati ha indubbiamente apportato grandi benefici alle tecniche di controllo delle vibrazioni; tuttavia, vi sono alcune intrinseche caratteristiche che ne limitano la funzionalità. Ad esempio, come detto per gli smorzatori a massa accordata l'efficacia del dispositivo è funzione del rapporto tra la massa della struttura primaria e la massa della struttura secondaria ed è necessario avere una massa secondaria sufficientemente grande da poter essere paragonata alla massa principale. Nel caso di grandi strutture o infrastrutture, in cui la massa della struttura principale è ingente, utilizzare una massa secondaria paragonabile diventa un'ulteriore sfida ingegneristica e una problematica sia di tipo costruttivo dovuta alla difficoltà di installazione e collegamento, sia di tipo strutturale in quanto comporta un incremento delle masse ed anche economico. Tra le più famose applicazioni esemplificative di TMD si ha il dispositivo installato in cima al grattacielo Taipei 101 a Taiwan, il quale raggiunge una massa di 800 tonnellate (Cimellaro G.P., Marasco S., 2018).

La progettazione di un sistema di isolamento efficace si basa sulla scelta di una determinata frequenza; il dispositivo è utile solo quando le frequenze di ingresso sono più grandi delle frequenze naturali fondamentali della struttura isolata di un valore pari a $\sqrt{2}$. Se il rapporto tra le frequenze di ingresso e le frequenze proprie è inferiore a tale quantità, si ha un aggravio delle vibrazioni piuttosto che una riduzione. Inoltre, si è già discusso del problema degli incrementi di spostamento dovuto alla flessibilità del sistema di isolamento, per il quale la soluzione di abbinamento al TMD si porta dietro tutte le criticità delineate per gli smorzatori a massa accordata.

1.5. SINOSSI

Nel presente capitolo è stata riportata una sintetica disamina dei sistemi di controllo attualmente utilizzati in ambito ingegneristico al fine di ridurre gli impatti che le vibrazioni di input hanno sulle strutture e sulle infrastrutture, nuove o esistenti. Si è visto come la moltitudine sia degli elementi costruttivi da proteggere che degli obiettivi abbia dato vita a tipologie di dispositivi molto diversi tra loro; all'interno della panoramica descritta ci si è soffermati su pregi, difetti e funzionamento di due principali sistemi di controllo passivi: i TMD ed i sistemi di isolamento alla base. Entrambi apportano notevoli vantaggi con la loro installazione; tuttavia, vi sono sempre delle problematiche residuali che il dispositivo singolo o accoppiato non riesce a risolvere, oppure la sua stessa installazione viene accompagnata da effetti indesiderati. Dall'analisi delle problematiche inerenti i dispositivi usualmente utilizzati, si palesa necessario un aggiornamento dei sistemi di controllo passivo in modo tale da attuare interventi risolutivi o migliorativi: all'interno del quadro delineato e in risposta alla necessità di potenziare l'efficacia dei sistemi di controllo delle vibrazioni, si inserisce il dispositivo inerter, che verrà caratterizzato al capitolo successivo.

IL DISPOSITIVO INERTER NEL CONTROLLO DELLE VIBRAZIONI

2.1. INTRODUZIONE

In ambito meccanico, dal 2002 (Smith M. C., 2002) il dispositivo inerter ha iniziato ad essere utilizzato, visti i risultati particolarmente convenienti del suo impiego. Viene introdotto come parte del circuito meccanico al pari degli elementi passivi molla e smorzatore (Chen M.Z.Q. et al., 2009) e viene utilizzato, opportunamente combinato, per migliorare il trasferimento della forza al sistema (Changning Liu et al., 2022). Dal 2002 al 2010 le principali applicazioni dell'inerter riguardano l'ambito meccanico e automobilistico, salvo poi diffondersi anche nell'ambito dell'ingegneria aerospaziale (Dong X. et al., 2015 - Liet Y. al., 2017), civile (Makris N., Moghimi G., 2019 - De Domenico D. et al., 2019), oceanica e dell'ingegneria del vento (Sugiura K. et al., 2020 - Sugiuraet K. al., 2021 - Zhang Z., Høeg C., 2021).

L'inerter e il suo funzionamento sono spesso soggetti a malintesi, nati dal fatto che l'inerter è allo stesso tempo un dispositivo ed un modello teorico (Smith M.C., 2020); per questo motivo, è necessario partire dall'introduzione del concetto di inerter e dal suo meccanismo di funzionamento.

2.2. IDEAZIONE E FUNZIONAMENTO DELL'INERTER

L'inerter è un elemento di massa con due terminali, il cui funzionamento si basa sulle proprietà di rigidità negativa e di amplificazione di massa. Queste caratteristiche lo hanno reso un dispositivo largamente utilizzato per controllare le vibrazioni dei sistemi come i dissipatori di energia, gli assorbitori dinamici e gli isolatori.

La configurazione dell'inerter si basa sull'analogia tra la forza e la corrente, tra sistema elettrico e sistema meccanico come è possibile vedere in **Fig. 2.1** (Ruisheng M. et al., 2021); le quantità che compaiono nel sistema meccanico sono f, v, k, m, c ovvero forza, velocità, rigidità, massa e coefficiente di smorzamento, mentre nel sistema elettrico si hanno i, u, L, C, R ovvero la corrente, la tensione, l'induttanza, la capacità e la resistenza.

La molla, la massa e il dissipatore del sistema meccanico corrispondono a induttore, condensatore e resistore nella rete elettrica; tutti gli elementi hanno due terminali tranne la massa e ciò la rende non del tutto equivalente nell'analogia con il condensatore.

Per tale ragione, Smith ha introdotto l'inerter con due terminali, in modo tale che il dispositivo sia in grado di generare una forza proporzionale alla differenza di accelerazione tra i due estremi; il suo funzionamento dipende dalla proprietà fondamentale, l'inertanza b , che amplifica l'accelerazione relativa tra i terminali (**Fig. 2.2**) (Smith M.C., 2020).

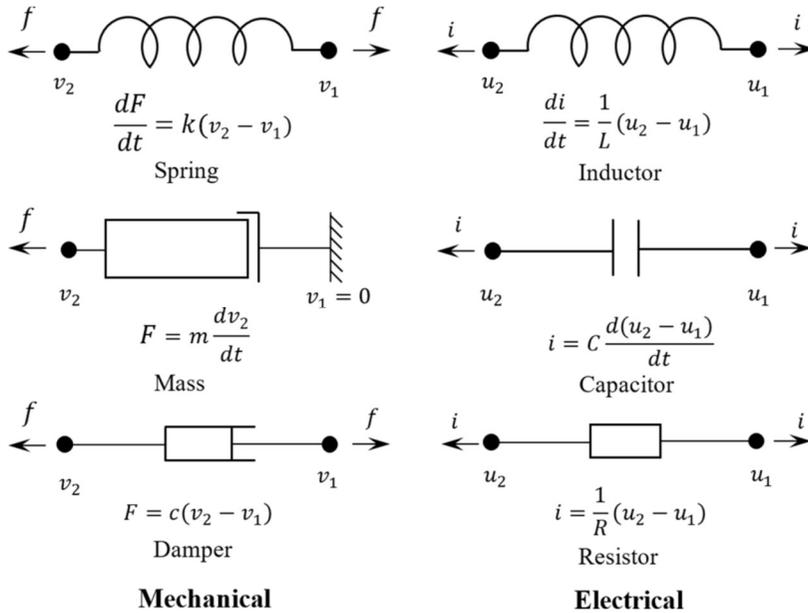


Fig. 2.1: analogia tra le componenti del sistema meccanico e le componenti del sistema elettrico

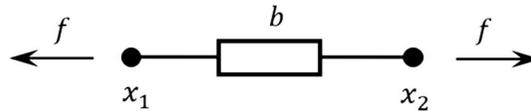


Fig. 2.2: schematizzazione del funzionamento di un generico dispositivo inerter

L'unità di misura dell'inertanza è il chilogrammo e l'equazione caratteristica del dispositivo è la seguente:

$$f = b(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) \tag{2.1}$$

Uno dei peculiari benefici apportati dall'inerter è l'effetto "rigidezza negativa" inteso come la capacità di generare una forza che assiste il movimento piuttosto che opporvisi, come accade invece nel caso di rigidezza positiva; la rigidezza negativa è utile per ridurre la frequenza naturale di un sistema vibrante. Un altro pregio è dovuto al fatto che l'inerter non risponde ai carichi verticali; grazie a questa caratteristica si evitano sia un aggravio della risposta statica sia possibili fenomeni di instabilità del sistema, come al contrario avviene nei classici dispositivi a rigidezza negativa.

In aggiunta all'effetto della rigidità negativa, il vantaggio principale dell'utilizzo dell'inertor consiste nella significativa amplificazione della massa che è in grado di garantire, soprattutto quando uno dei terminali del dispositivo è collegato al suolo. Grazie all'effetto dell'amplificazione, è possibile pertanto diminuire la massa ausiliaria dei sistemi secondari utilizzati per il controllo delle vibrazioni. La modellazione meccanica dell'inertor si fonda sulla sua schematizzazione, già introdotta in **Fig. 2.2**, in cui la forza è proporzionale, tramite l'inertanza, alla differenza di accelerazione che nasce tra i due capi del dispositivo. La legge descritta varia nel tempo e l'equazione (2.1) si può scrivere come:

$$f(t) = b(\ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t)) \quad (2.2)$$

In questo caso $b > 0$. Se si assume che x_1 e x_2 siano due eccitazioni armoniche con frequenza di vibrazione ω , si può riscrivere la (2.2) nel dominio della frequenza come:

$$F e^{i\omega t} = -b\omega^2(X_2 - X_1)e^{i\omega t} \quad (2.3)$$

In cui F è l'ampiezza della forza, X_1 e X_2 sono le ampiezze degli spostamenti. F è negativamente correlata con l'ampiezza dello spostamento relativo $(X_2 - X_1)$, attraverso la rigidità negativa $-b\omega^2$

2.3. TIPOLOGIE DI INERTOR

La generalità concettuale del funzionamento dell'inertor ha permesso di costruire molti prototipi con diverso funzionamento ed i principali sono:

- Ball-screw inertor, con viti e sfere;
- Rack and pinion inertor, con una o più cremagliere collegate per aumentare l'amplificazione di massa;

- Idraulico o a fluido, in cui solitamente il fluido viene convogliato in delle spire esterne o coassiali al dispositivo cilindrico;
- Elettromagnetico;
- Living-hinge.

2.3.1. BALL-SCREW INERTER

L'inerter con configurazione *ball-screw* è costituito da una vite filettata e delle sfere, un dado, un cuscinetto radiale, un alloggiamento ed un volano collegato al dado. Il componente fondamentale è la vite filettata, la quale riesce a trasformare il suo movimento traslazionale in una rotazione del dado in testa; a sua volta il dado mette in rotazione il volano che, sfruttando l'inerzia rotazionale piuttosto che traslazionale, manifesta un'amplificazione di massa e si parla di massa apparente in termini di inerzia.

Nella **Fig. 2.3** è possibile vedere un disegno schematico di un inerter del tipo *ball-screw* (Smith M.C., 2020) ed uno dei primi prototipi sviluppati (Papageorgiou et al., 2009).

Il progetto del dispositivo si incentra pertanto sulla determinazione dell'inerzia ideale, mediante l'equazione:

$$b = \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 I \quad (2.4)$$

In cui I è il momento di inerzia del volano, l è la lunghezza della guida della vite ovvero la lunghezza di traslazione. Appare evidente che l'inerzia aumenta al crescere del momento d'inerzia e al diminuire della lunghezza di traslazione, ne consegue che l'aumento o la diminuzione dell'uno o dell'altro verrà calibrato in base alla situazione reale e alla convenienza ingegneristica, soprattutto in riferimento allo spazio disponibile per la collocazione del dispositivo.

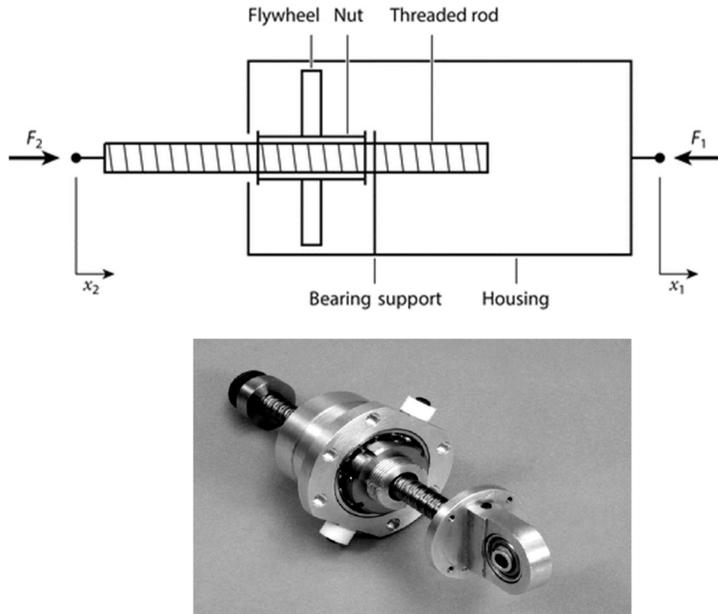


Fig. 2.3: schematizzazione inerter tipo *ball-screw* e prototipo sviluppato da Papageorgiou et al.

2.3.2. RACK AND PINION INERTER

L'inerter con configurazione *rack and pinion* è costituito da un pignone, una cremagliera con ingranaggi e un volano all'interno di un alloggiamento, all'interno del quale la cremagliera scorre e così mette in rotazione il volano attraverso il pignone e gli ingranaggi (Fig. 2.4 in alto, da Smith M.C., 2020). Papageorgiou et al. ha sviluppato un prototipo anche per la tipologia di inerter *rack and pinion* (Fig. 2.4 in basso).

In questa configurazione, l'inertanza ideale è funzione del momento di inerzia del volano I e dal rapporto di trasmissione η :

$$b = \eta^2 I \quad (2.5)$$

Il rapporto di trasmissione dipende dalla geometria del dispositivo, in particolare dai raggi degli ingranaggi A, B e C, rispettivamente r_1, r_2, r_3 , nel seguente modo:

$$\eta = \frac{r_2}{r_1 r_3} \quad (2.6)$$

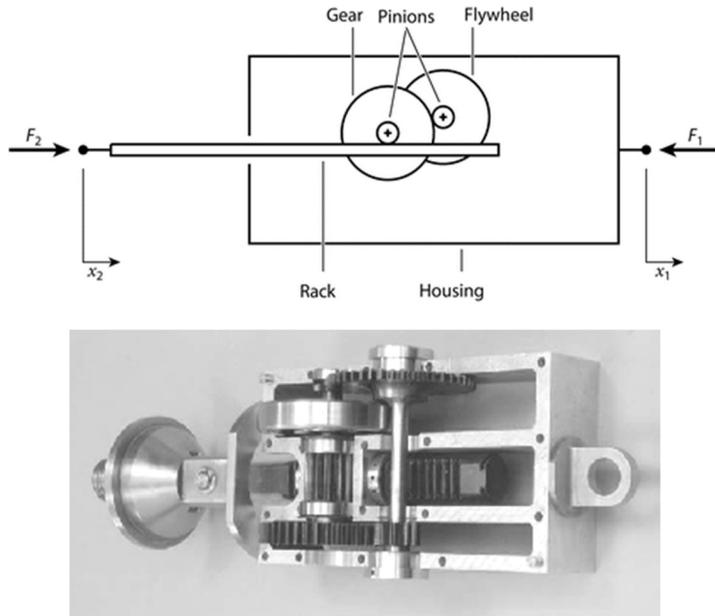


Fig. 2.4: schematizzazione inerter tipo *rack and pinion* e prototipo sviluppato da Papageorgiou et al.

2.3.3. INERTER IDRAULICO

L'inerter idraulico è costituito da un motore idraulico, un cilindro, un pistone, il volano e i tubi di collegamento. Il meccanismo idraulico mette in movimento il volano, grazie alla differenza di pressione dovuta al pistone mobile tra i due lati del motore idraulico (**Fig. 2.5** in alto, da Smith M.C., 2020). Tra i primi esempi di inerter a fluido si riporta il prototipo in **Fig. 2.5** in basso (Wang et al., 2010).

In questa tipologia di inerter, in cui si indica con A l'area di lavoro del cilindro idraulico, D il passo del motore idraulico e I il momento di inerzia del volano, l'inertanza ideale è data da:

$$b = \left(\frac{A}{D} \right)^2 I \quad (2.7)$$

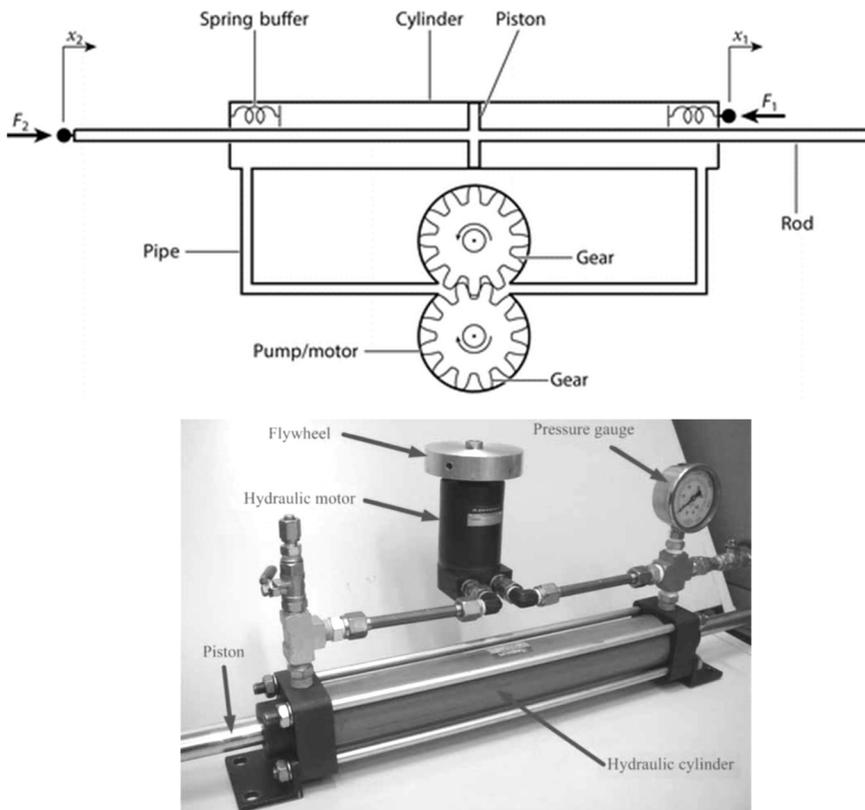


Fig. 2.5: schematizzazione inerter tipo idraulico e prototipo sviluppato da Wang et al.

2.3.4. INERTER A FLUIDO ELICOIDALE

L'inerter a fluido elicoidale è costituito da un pistone, un cilindro e un canale elicoidale (Fig. 2.6 in alto, da Smith M.C., 2020), il quale può essere coassiale al cilindro oppure esterno. La Fig. 2.6 in basso mostra uno dei prototipi realizzato recentemente (De Domenico et al., 2019).

Il meccanismo di funzionamento è il seguente: quando il pistone è attivo, si crea una differenza di pressione tra le due camere di destra e sinistra e tale differenza di pressione induce il fluido ad immettersi nel canale elicoidale, generando inerzia rotazionale.

La velocità con cui il fluido circola all'interno delle spire dipende dal rapporto tra l'area del cilindro e l'area del canale stesso. Il fluido ha una densità

ρ , il canale ha una lunghezza l_h e una sezione di area A_2 mentre la sezione del cilindro ha area A_1 . L'inertanza si può ricavare come:

$$b = \rho l_h \frac{A_1^2}{A_2} \quad (2.8)$$

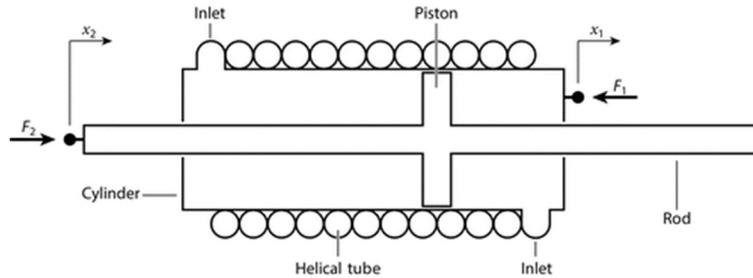


Fig. 2.6: schematizzazione inerter a fluido elicoidale da Smith M.C., 2020 e prototipo sviluppato da Domenico et al.

Per l'inerter a fluido elicoidale esiste anche una diversa configurazione, in cui le spire sono interne, attorno al pistone (**Fig. 2.7**) (Zhang, X. L. et al., 2020) Anche per questa configurazione, si può sempre utilizzare l'equazione (2.8) per calcolare l'inertanza.

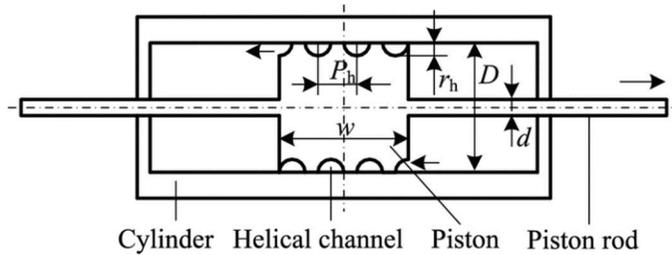


Fig. 2.7: schematizzazione inerter a fluido elicoidale interno

2.3.5. INERTER ELETTROMAGNETICO

L'inerter elettromagnetico è costituito da una bobina, un'asta magnetica e un condensatore (Fig. 2.8 sx). Uno dei prototipi realizzati (Gonzalez-Buelga et al., 2015) è riportato in Fig. 2.8 a destra.

Il funzionamento dell'inerter elettromeccanico è il seguente: l'asta magnetica si muove, il flusso magnetico cambia e si genera una tensione attraverso la bobina; nasce un campo magnetico opposto per la corrente che scorre nella bobina e il campo genera una forza resistente. Indicando con Bl il coefficiente di accoppiamento e con C_a il condensatore, l'inertanza dell'inerter elettromagnetico è data da:

$$b = (Bl)^2 C_a \quad (2.9)$$

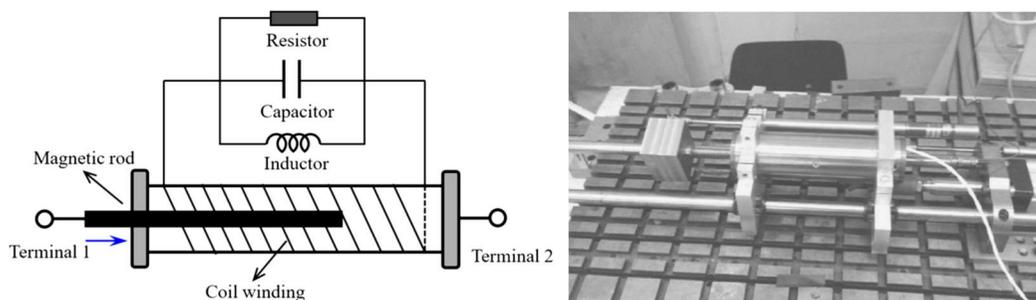


Fig. 2.8: schematizzazione inerter elettromagnetico e prototipo sviluppato da Gonzalez-Buelga et al.

2.3.6. INERTER LIVING HINGE

L'inerter *living hinge*, ovvero a cerniera, è costituito da due bielle, due cerniere mobili e un volano. Una delle cerniere è posizionata al centro del volano, mentre

l'altra è sfalsata rispetto al certo di una certa distanza d , come è possibile vedere in **Fig. 2.9**; inoltre si riporta il prototipo (John et al., 2019). Il movimento traslatorio induce la rotazione del volano sfruttando l'effetto del braccio di leva, e l'inertanza ideale della cerniera, inversamente proporzionale alla distanza tra le cerniere, è data da:

$$b = \frac{1}{d^2} I \quad (2.10)$$

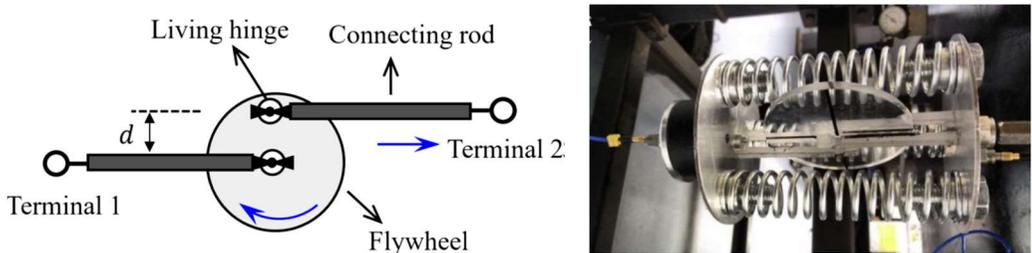


Fig. 2.9: schematizzazione inerter *living hinge* (sx) e prototipo sviluppato da John et al. (dx)

2.4. L'UTILIZZO DELL'INERTER NEI SISTEMI DI CONTROLLO DELLE VIBRAZIONI

2.4.1. GENERALITÀ

L'inerter viene spesso affiancato ai tradizionali sistemi di controllo delle vibrazioni di tipo passivo, in qualità di dissipatore di energia, di assorbitore dinamico oppure in abbinamento al classico sistema di isolamento. Un riscontro analitico del contributo dell'inerter aggiunto ad un sistema strutturale si può rapidamente ottenere considerando una struttura ad n gradi di libertà, con masse concentrate, smorzatori e molle. Introducendo le matrici delle masse \mathbf{M} , di dissipazione \mathbf{C} e di rigidità \mathbf{K} , l'equazione del moto del sistema è (Soong T.,1988):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{D}\mathbf{f}_C(t) + \mathbf{E}\mathbf{f}_E(t) \quad (2.11)$$

In cui $\mathbf{x}(t)$, $\dot{\mathbf{x}}(t)$, $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ sono i vettori degli spostamenti, delle velocità e delle accelerazioni; $\mathbf{f}_C(t)$ è il vettore delle forze di controllo, $\mathbf{f}_E(t)$ è il vettore delle eccitazioni esterne. \mathbf{D} ed \mathbf{E} sono le matrici di colazione delle forze applicate e delle eccitazioni esterne. Si assume che $\mathbf{f}_C(t)$ sia una funzione lineare degli spostamenti, delle velocità, delle accelerazioni e delle eccitazioni esterne. Nel caso in cui il sistema di controllo sia tradizionale, senza inerter, il vettore $\mathbf{f}_C(t)$ si esprime mediante la relazione (2.12), mentre aggiungendo il dispositivo inerter si ha la (2.13):

$$\mathbf{f}_C(t) = \mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{E}_1 \mathbf{f}_E(t) \quad (2.12)$$

$$\mathbf{f}_C(t) = \mathbf{b}_1 \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{E}_1 \mathbf{f}_E(t) \quad (2.13)$$

In cui $\mathbf{b}_1, \mathbf{C}_1, \mathbf{K}_1$ sono l'inertanza e le matrici di dissipazione e rigidità del sistema di controllo basato sull'inerter, mentre \mathbf{E}_1 è la matrice delle forze esterne agente sul sistema di controllo.

Sostituendo l'equazione (2.12) all'interno della (2.11) si ottiene:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}(t) = \mathbf{D} [\mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{E}_1 \mathbf{f}_E(t)] + \mathbf{E} \mathbf{f}_E(t) \quad (2.14)$$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{C} - \mathbf{D}\mathbf{C}_1) \dot{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{K} - \mathbf{D}\mathbf{K}_1) \mathbf{x}(t) = (\mathbf{E} + \mathbf{D}\mathbf{E}_1) \mathbf{f}_E(t) \quad (2.15)$$

Sostituendo l'equazione (2.13), in cui si ha il contributo dell'inerter, all'interno della (2.11) si ottiene:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}(t) = \mathbf{D} [\mathbf{b}_1 \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{E}_1 \mathbf{f}_E(t)] + \mathbf{E} \mathbf{f}_E(t) \quad (2.16)$$

$$(\mathbf{M} - \mathbf{D}\mathbf{b}_1) \ddot{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{C} - \mathbf{D}\mathbf{C}_1) \dot{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{K} - \mathbf{D}\mathbf{K}_1) \mathbf{x}(t) = (\mathbf{E} + \mathbf{D}\mathbf{E}_1) \mathbf{f}_E(t) \quad (2.17)$$

Dal confronto tra le equazioni (2.15) e (2.17) si evince che: nel caso di un classico sistema di controllo delle vibrazioni, si ha la possibilità di intervenire sui termini di smorzamento e di rigidità del sistema, mentre aggiungendo l'inerter si ha la possibilità di controllare anche il termine legato alle inerzie, il che fornisce

un modo diverso di controllare le vibrazioni regolando tutte le proprietà della struttura.

2.4.2. L'INERTER IN AGGIUNTA AL TMD

Uno degli utilizzi più convenienti, in ambito dell'ingegneria civile, dell'inerter è quello che lo vede in abbinamento ai TMD per ridurre la massa secondaria degli assorbitori. In **Fig. 2.10** (Marian L., Giaralis A., 2014) si ha la struttura principale, schematizzata semplicemente come composta da una massa, una molla e un dissipatore e tutti gli elementi riportano il pedice 1. In aggiunta si ha l'inserimento del TMD con i suoi componenti, e l'inerter con l'inertanza b ed attaccato al suolo.

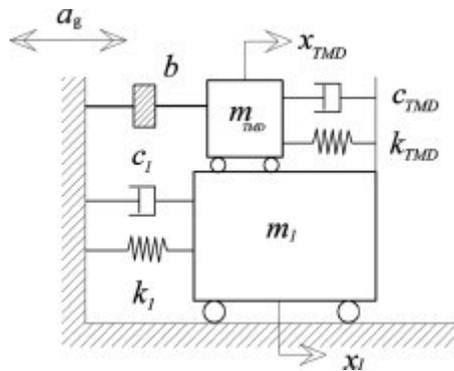


Fig. 2.10: schematizzazione sistema TMDI

Specificare la posizione dell'inerter all'interno del sistema secondario è importante, difatti sono stati analizzati due differenti scenari: il caso in cui l'inerter è posto tra la massa accordata e la struttura ospitante ed il caso in cui è inserito tra la massa accordante ed il terreno. Nella prima configurazione, il miglioramento della risposta non è molto evidente (Hu Y., Chen M.Z.Q., 2015), al contrario della configurazione in cui è attaccato al suolo, dalla quale risultano significativi potenziamenti della performance (Xu K. et al., 2019 – Dai J. et al., 2019 – Dai J. et al., 2021 – Sarkar S. et al., 2019 – Zhang Z. et al., 2020). L'inerter attaccato al suolo però è complicato o impossibile da utilizzare nel caso di strutture alte con molti piani, oppure per infrastrutture quali i ponti.

Il primo modello di TMDI è stato introdotto da Marian e Giaralis nel 2014, con cui è stato mitigato il moto oscillatorio di sistemi a catena sottoposti a moti stocastici del terreno. L'inerter è servito a ridurre la massa del sistema secondario oppure migliorarne le prestazioni trovando i parametri ottimali che, in questa applicazione, servivano a minimizzare la varianza di spostamento della struttura primaria. Tuttavia, è sempre bene ricordare che ottimizzare il TMDI per minimizzare le risposte strutturali non è l'unico aspetto da valutare nella sua progettazione in quanto ne risulta una forza di controllo, applicata dal TMDI sulla struttura, che a volte può essere eccessiva e danneggiarla. Pertanto, al fine di aggiungere anche valutazioni nei riguardi della forza di controllo oppure di altri aspetti come ad esempio il costo del ciclo vita, i problemi analizzati sono stati affrontati con metodi di ottimizzazione multi obiettivo (Ruiz R. et al., 2018 – Giaralis A. et al., 2018 – Pietrosanti D. et al., 2020 – Taflanidis AA. et al., 2019 – Kaveh A. et al., 2020).

Confermata la convenienza dell'utilizzo del TMDI, ne sono state studiate le prestazioni per ridurre le vibrazioni: sono stati condotti esempi applicativi teorici su travi (Jin X. et al., 2019) e cavi (Sun L. et al., 2017 – Lazar I.F. et al., 2016), mentre applicazioni pratiche in ambito civile ne hanno visto l'utilizzo ad esempio in edifici multipiano (Shen W. et al., 2019 – Krenk S., 2019) oppure nel settore energetico è stato aggiunto ai convertitori per ottimizzare la produzione di energia dal moto ondosso (Sugiura K., 2020).

Al fine di aumentare l'efficacia del sistema secondario, si è inoltre pensato di utilizzare più TMDI o TID insieme, realizzando uno smorzatore multiplo a masse accordate; in tal modo è possibile ottenere numerosi vantaggi: utilizzare più dispositivi permette di avere, per ciascuno, una massa inferiore a quella che dovrebbe competere ad un unico sistema secondario per garantire il grado di controllo delle vibrazioni desiderato. Inoltre, ogni dispositivo può in realtà essere sintonizzato a frequenze diverse il che permette di ottenere l'enorme vantaggio di proteggere il sistema primario non solo dalla frequenza fondamentale della

struttura, ma anche dalle frequenze superiori (Zhang S.Y. et al., 2020 – Wen Y. et al., 2017 – Cao L., Li C., 2019 – Palacios-Quinonero F. et al., 2019 -De Domenico D. et al., 2020 – Cao L. et al., 2020).

È possibile inoltre utilizzare il TMDI in una configurazione particolare, ovvero scegliendo una massa sintonizzata nulla; in tal caso, il sistema secondario prende il nome di *Tuned Inerter Damper* (TID). È stato valutato (Lazar I.F. et al., 2014) l'utilizzo del TID in sostituzione del classico TMD ed è stato desunto che è cruciale, in tal senso, la scelta del punto di installazione: un TID con uno dei due capi del dispositivo agganciati al suolo è competitivo quanto il classico TMD, avendo inoltre a favore il pregio di mantenere dimensioni complessive molto più compatte grazie a masse decisamente inferiori.

Il TMDI può essere utilizzato, come già accennato precedentemente, in diverse applicazioni ma soprattutto in numerosi ambiti dell'ingegneria; anche all'interno del settore dell'ingegneria civile, esso può essere sfruttato per proteggere sia strutture che infrastrutture tra loro molto diverse. Di seguito, allo scopo di avvalorare l'efficacia del sistema secondario *Tuned Inerter Mass Damper*, vengono riportati alcuni esempi applicativi da letteratura.

TMDI in strutture

L'inerter può essere aggiunto in un edificio multi piano per ridurre la risposta sismica come in **Fig. 2.11**; in questo caso però l'inerter non è collegato al suolo ma ad uno dei piani inferiori, per ridurre lo spostamento di interpiano.

È stata studiata (Giaralis A. et al., 2017 – Petrini F. et al., 2020) l'attenuazione delle vibrazioni dovute al vento in una struttura di 74 piani. Sono riportati i risultati in termini di accelerazione (**Fig. 2.12**) trasferita dall'ultimo piano, cui si trova il dispositivo, confrontando il caso in cui la struttura non è controllata con i casi in cui si ha un TMD oppure un TMDI con il secondo terminale dell'inerter attaccato al piano inferiore di 1 livello, 2 livelli e 3 livelli di distanza.

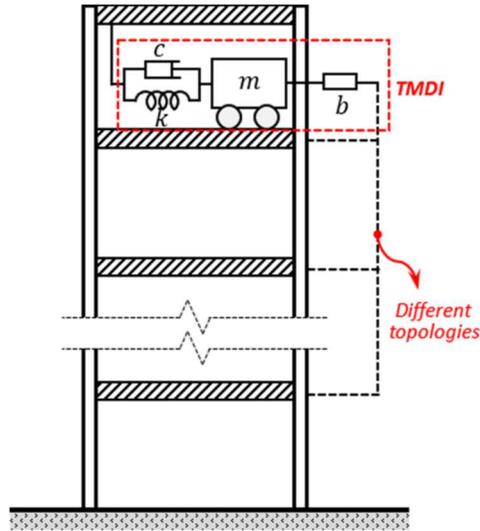


Fig. 2.11: TMDI in un edificio multipiano

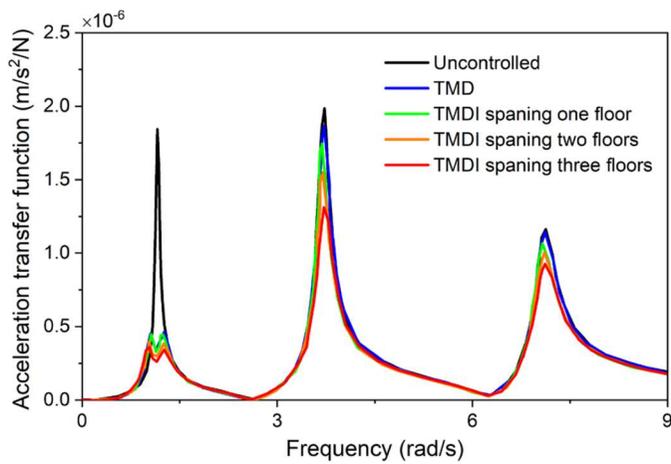


Fig. 2.12: funzione di trasferimento in accelerazione per il caso studio da letteratura di un edificio di 74 piani sotto un'azione dinamica dovuta al vento, per diverse configurazioni del TMDI

Dal confronto tra i picchi della risposta in accelerazione, riferiti all'ultimo piano della struttura, che il TMDI lavora in maniera più efficace del classico TMD ed inoltre sembra che vi sia una convenienza quando l'inerter si estende per più piani collegandosi a livelli più distanti dal piano di installazione. Tuttavia, nell'esempio riportato la configurazione scelta, con rapporto di massa pari allo 0.5% e rapporto di inerzia pari al 30%, la forza d'azione dell'inerter è considerevole ed inoltre il dispositivo non si mantiene compatto, occupando una rilevante parte dello spazio disponibile. Da ciò si desume che non esiste

un'universalità nella convenienza dell'impiego dell'inerter, in quanto in alcuni casi vi è un non del tutto ammissibile aumento dei costi di costruzione e della difficoltà costruttiva e di installazione.

TMDI nelle infrastrutture

Nel caso di strutture da ponte, si citano gli studi di Xu K. et al. Del 2019, di Dai J. et al. Del 2019 e di Dai J. et al. del 2021 in cui si indaga la riduzione delle vibrazioni causate dai vortici. I risultati hanno mostrato che il TMDI riduce questa tipologia di vibrazioni per i ponti, ma diminuiscono anche l'allungamento statico dell'impalcato e lo spostamento del dispositivo, al quale viene così evitato di raggiungere la corsa massima.

Il TMDI viene anche installato su turbine o pale eoliche (Sarkar S., Fitzgerald B., 2019 – Zhang Z., Fitzgerald B., 2020), in quanto su queste infrastrutture lo spazio di applicazione per il classico TMD è molto ristretto ed è necessario avere dispositivi più compatti e performanti in termini di riduzione degli spostamenti.

2.4.3. L'INERTER IN AGGIUNTA AL SISTEMA DI ISOLAMENTO

Uno dei campi di applicazione principali dell'inerter è quello meccanico; già dalla sua introduzione, infatti, è stato percepito come fondamentale il suo utilizzo grazie alle dimensioni compatte, soprattutto in ambito automobilistico, in cui gli spazi di installazione sono esigui. Il funzionamento delle sospensioni delle automobili è simile al funzionamento dei sistemi di isolamento delle vibrazioni e per questo motivo, grazie ai progressi fatti in ambito meccanico, negli ultimi decenni è stato possibile applicare l'inerter anche in aggiunta agli isolatori. Le configurazioni con cui si abbinano i due dispositivi possono essere molteplici, ad esempio Hu et al. nel 2015 ha proposto cinque diverse possibili configurazioni; tra queste, si menziona come maggiormente conveniente quella in cui l'inerter è in parallelo rispetto alla molla ed allo smorzatore (**Fig. 2.13**) poiché in questo

modo riesce ad incrementare l'intervallo di frequenze in cui si ha l'attenuazione delle vibrazioni.

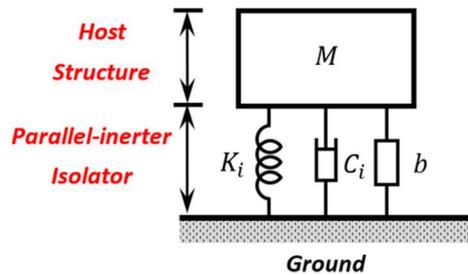
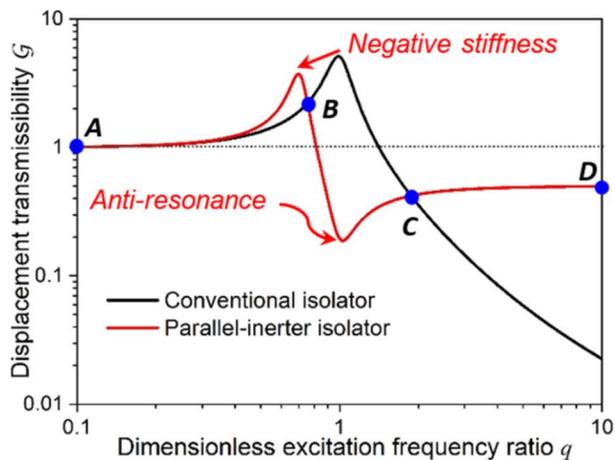


Fig. 2.13: isolatore con inerter in parallelo

L'incremento prestazionale dovuto alla configurazione parallela è stato confermato nei lavori di Zilletti del 2016 e di Ma R. et al. del 2018, nei quali si evince come la rigidezza negativa dell'inerter riesca a ridurre la frequenza naturale del sistema principale, dando origine ad un effetto di *anti risonanza* nei confronti dello spostamento, rispetto al sistema di isolamento tradizionale.



Nell'ambito dell'ingegneria civile, i classici sistemi di isolamento alla base sono ampiamente sfruttati, con risultati vantaggiosi nel ridurre la risposta di strutture soggette a movimenti del terreno. Tuttavia, l'aumento del periodo proprio della struttura principale causa spostamenti laterali significativi, che potrebbero anche essere incompatibili con l'effettiva capacità di spostamento del sistema di isolamento con conseguenti difficoltà sia nell'installazione che nella

progettazione. L'aggiunta dell'inerter consente di ridurre gli spostamenti ma a discapito delle accelerazioni sotto alcuni terremoti, a causa di forze eccessive ad alte frequenze. La forza esercitata dall'inerter sul sistema di isolamento è, difatti, non indifferente e questo in alcuni casi comporta eventualmente la necessità di irrobustire gli isolatori.

Un'altra combinazione frequente è quella che vede l'accoppiamento del sistema di isolamento non soltanto con un dispositivo inerter, ma con un TMD, per ridurre lo spostamento laterale. Come già menzionato nel §2.4.2, il TMD per poter funzionare correttamente deve avere una massa accordata notevole ed anch'essa in tal caso è soggetta a grandi spostamenti, con rischio di impattare sulle fondazioni o sugli elementi strutturali contigui. Di conseguenza, anche in questo caso si ricorre al dispositivo abbinato TMDI in aggiunta al sistema di isolamento (De Domenico D., Ricciardi G., 2018 - Michael F. et al, 2018 – De Angelis M. et al., 2019 – Pietrosanti D. et al., 2020 – Masnada C. et al., 2020) . In **Fig. 2.14** è schematicamente descritto il sistema: la struttura principale, di massa m_I ha un sistema di isolamento alla base BIS formato da una molla e un dissipatore; viene aggiunto un TMDI con in serie una massa, una molla, un dissipatore e l'inerter collegato al suolo.

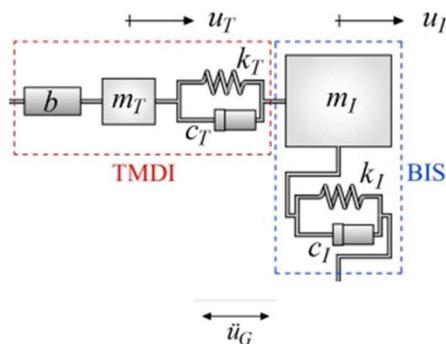


Fig. 2.14: schematizzazione abbinamento sistema di isolamento e TMDI

È stato dimostrato (De Domenico D., Ricciardi G., 2017) che inserire un dispositivo TMDI attaccato al piano di isolamento riesce a ridurre la domanda di spostamento che si concentra in questo livello; inoltre, studiando la risposta

probabilistica di edifici multipiano sottoposti a diverse azioni sismiche, si è visto che diminuiscono anche le risposte della sovrastruttura isolata, in termini ad esempio di spostamenti di taglio e di interpiano, contestualmente garantendo che non venga superato il massimo *stroke* degli isolatori. Grazie alle riduzioni di spostamenti anche nel livello di isolamento, è possibile inoltre scegliere dei dispositivi più piccoli, con un conseguente risparmio in termini economici, che è rilevante soprattutto in considerazione che non è più necessario adottare delle costose connessioni flessibili per i servizi. Diminuisce inoltre il pericolo di martellamento su edifici vicini (Anagnostopoulos S.A, Spiliopoulos K.V., 1992), in special modo in tutti quei contesti urbani in cui il tessuto edilizio già esistente non è stato costruito nel rispetto delle distanze previste tra edifici attigui.

2.5. COMPLESSITÀ E CRITICITÀ

L'introduzione del dispositivo inerter ha segnato una scissione rispetto alle precedenti, tradizionali tecniche di protezione dalle vibrazioni; l'innovazione e i vantaggi sono molteplici dal punto di vista costruttivo, applicativo e prestazionale. Eppure, permangono tutt'oggi delle criticità che dovranno essere studiate ed indagate per consentire ai dispositivi ad inerter di essere ampiamente utilizzati nella pratica professionale. Il presente paragrafo si prefigge l'obiettivo di discutere le principali problematiche e complessità del sistema, illustrando quali dovrebbero essere i punti focali di studi e applicazioni future.

Innanzitutto, l'inerter viene spesso utilizzato con grande convenienza nei dissipatori in quanto, grazie alla sua caratteristica di avere rigidità negativa, accresce significativamente la capacità di dissipare energia. Tuttavia, nel caso in cui l'inerter sia utilizzato nei dissipatori DVA al posto dello smorzatore, i costi aggiuntivi dovuti alla sua installazione non compensano l'effettivo miglioramento delle prestazioni, che dipende molto dalla configurazione utilizzata, dalle

caratteristiche di smorzamento della struttura e delle frequenze del sistema e dell'eccitazione.

Nel caso in cui l'inerter venga aggiunto al TMD formando un TMDI oppure un TDI (nel caso di massa nulla), i miglioramenti sono considerevoli in termini di riduzione dello spostamento per il dispositivo, che evita così il rischio di incorrere nel suo massimo *stroke*; i risultati sono notevoli soprattutto nel caso in cui una delle estremità dell'inerter è collegata al suolo, ma è facile comprendere come questa connessione sia possibile solamente in alcuni casi e diventa difficilmente attuale o persino inattuabile nel caso di grattacieli o ponti. Come soluzione è stato proposto di utilizzarlo, ad esempio, per collegare tra loro piani diversi di edifici alti con risultati convenienti ma alcune difficoltà realizzative, in quanto le connessioni di interpiano devono essere robuste. Per questo motivo, risulta comunque più conveniente impiegarlo su strutture basse, ad esempio in accoppiamento con il tradizionale sistema di isolamento alla base.

È stato osservato come alcune applicazioni si basino sul concetto di rigidità negativa, legata al comportamento dell'inerter; tuttavia dall'equazione (2.3) si evince come la forza di controllo che esercita l'inerter sulla struttura, per contrastare le vibrazioni, sia proporzionale al quadrato della frequenza. Da ciò si deduce che l'incremento della forza di controllo applicata è rilevante soprattutto alle alte frequenze e da ciò consegue la necessità di valutare se la struttura sia in grado di ricevere una forza di tale entità: diventa un problema costruttivo e strutturale. Da ciò, probabilmente è preferibile utilizzare l'inerter nel caso in cui le frequenze siano basse, oppure eventualmente tenere in considerazione tale effetto. Difatti, fino ad ora le ottimizzazioni dell'inerter sono state condotte con funzioni mono-obiettivo, ricercando la massima performance; sarebbe opportuno utilizzare funzioni multi-obiettivo, tentando di ottenere risultati forse più contenuti in termini prestazionali ma che tengano in considerazione anche altri fattori come la forza di controllo, i costi di produzione e le difficoltà di realizzazione e applicazione.

Un'altra riflessione da fare riguarda la modellazione del dispositivo, che generalmente si assume avere comportamento lineare; è intuitivo che nella realtà il comportamento non rispecchia l'idealizzazione assunta e le non linearità andranno ad influire sulle performance ottenute e sulle caratteristiche del dispositivo ottenute dalle tecniche di ottimizzazione; deve altresì essere considerato che l'azione ciclica delle forze di controllo del dispositivo sulla struttura nel caso di determinate tipologie di sollecitazioni può comportare danneggiamenti e rotture dovute ai fenomeni di fatica. Inoltre, bisogna sottolineare il fatto che gli studi analitici condotti sull'inerter si basano sull'indagine della risposta nel caso di una determinata sollecitazione, sia essa armonica, dovuta al vento oppure alle vibrazioni telluriche: non viene tenuta in considerazione la possibilità che i dispositivi siano soggetti contemporaneamente a diverse eccitazioni e pertanto bisognerebbe condurre un'analisi multirischio del sistema.

Infine, si sottolinea come, contrariamente alla vasta diffusione di studi analitici circa l'impiego dell'inerter in abbinamento ai classici sistemi di controllo delle vibrazioni, gli studi sperimentali, soprattutto nell'ambito dell'ingegneria civile, non sono altrettanto numerosi. Molti test sono stati eseguiti su prototipi in scala, sono sporadici i test in scala e ancor più rare le applicazioni reali, che riguardano quasi esclusivamente i sistemi di dissipazione energetica.

2.3. SINOSSI

Nel presente capitolo è stato introdotto il dispositivo inerter discutendone caratteristiche, funzionalità, vantaggi e criticità di installazione. Partendo dall'analogia elettro-meccanica che ha dato l'input per la sua ideazione, si è proceduto a descrivere il ruolo dell'inerter all'interno dei classici sistemi di controllo delle vibrazioni, commentando le implicazioni del suo abbinamento con

gli elementi tradizionali utilizzati. I vantaggi dell'introduzione dell'inerter sono molteplici: la rigidità negativa, la non risposta ai carichi verticali atta ad evitare fenomeni di instabilità ed incrementi delle forze statiche, lo sfruttamento dell'inerzia rotazionale e non traslazionale che consente alla massa apparente, ovvero l'inertanza, di garantire gli stessi effetti di masse fisiche notevolmente superiori. La configurazione più vantaggiosa dell'inerter è quella in cui uno dei terminali è attaccato al suolo, il che è generalmente fattibile per le strutture ma diventa complicato in grandi installazioni quali ad esempio grattacieli e ponti; tuttavia, anche in questi casi il suo contributo, seppur meno performante, rimane decisamente valido. Inoltre, le dimensioni compatte della massa apparente rendono realizzabile intervenire con l'inerter anche in situazioni in cui non sarebbe possibile inserire un dispositivo classico per questioni di spazio. Tra gli abbinamenti più comuni, studiati e utili nell'ambito dell'ingegneria civile, è stato analizzato il TMDI in cui l'inerter viene inserito all'interno di un TMD con massa fisica ridotta o nulla, confermando la sostanziale diminuzione degli spostamenti già garantita dal TMD, con in più tutti i sopracitati vantaggi derivanti dall'inerter. L'abbinamento dell'inerter con il sistema di isolamento alla base, invece, consente non di risolvere problemi di carattere pratico/realizzativo del dispositivo, come nel caso del TMDI, ma di evitare che si verifichi una delle implicazioni negative dell'installazione degli isolatori: l'incremento degli spostamenti. In tal modo, è possibile raggiungere il duplice risultato di ottenere forze nettamente ridotte sulla sovrastruttura grazie al BIS e di non eccedere con gli spostamenti grazie all'inserimento di un inerter/TMDI che proteggono dal punto di vista funzionale e costruttivo la struttura ed anche le strutture adiacenti. Nei capitoli successivi si vedrà come l'inerter possa essere aggiunto ai classici supporti massa-molla risonanti per il controllo delle vibrazioni delle condotte oppure unitamente al sistema di isolamento per la protezione dei ponti come TMDI.

CONDOTTE LOCALMENTE RISONANTI

3.1. LE VIBRAZIONI NELLE CONDOTTE

Le condotte sono infrastrutture dedite al trasporto di acqua o idrocarburi, dal luogo della loro produzione o captazione ai luoghi di consumo; i tubi idraulici sono classiche applicazioni dell'ingegneria civile (Xu Y.D. et al., 2022), le condotte che convogliano petrolio invece riguardano principalmente l'ingegneria meccanica ed aerospaziale (Gao P.X. et al., 2021), così come le condotte in pressione negli aerei o nelle centrali nucleari, si citano infine i sistemi di trasporto di gas dai gasdotti naturali (Liu E.B. et al., 2021). L'approvvigionamento delle sostanze trasportate dai sistemi di tubazioni ha reso necessario ideare metodi di protezione, dato che lungo il loro sviluppo sono soggette a sollecitazioni interne, dovute al mezzo transitante, ed esterne da parte dei supporti su cui poggiano (Ding H. et al., 2019 – Fan X. et al., 2023) o per il verificarsi di particolari eccitazioni. Nel caso di sollecitazioni interne, ad esempio il passaggio del fluido stesso nella condotta genera una forza di Coriolis sul tubo (Ibrahim R.A., 2010 - Ibrahim R.A., 2011) mentre le variazioni di velocità inducono vibrazioni non costanti per le quali è difficile progettare un sistema di controllo (Hao M.Y. et al., 2023) e che possono inoltre portare a fenomeni di instabilità dinamica qualora la velocità raggiunga valori elevati (Païdoussis M. P., Issid N. T, 1974).

Le sollecitazioni inducono vibrazioni, le quali generano azioni dinamiche variabili e deformazioni ingenti, comportando spesso danni per fatica o guasti che possono avere come conseguenza disagi diffusi o addirittura gravi incidenti, in funzione del fluido o del gas trasportato (Ding H., Ji J.C., 2023). È intuitivo capire

il grado di complessità e di rischio che comporterebbe un guasto verificatosi in uno dei sistemi di tubazioni delle centrali nucleari: è di grande interesse proteggere questi impianti e le industrie petrolchimiche dalle sollecitazioni sismiche (Kumar P. et al., 2016 - Kwag S. et al., 2021).

La letteratura scientifica che si occupa di indagare sul controllo delle vibrazioni dei sistemi di condotte ad oggi è costituita maggiormente da studi circa le caratteristiche comportamentali di tali complessi sistemi: non è possibile pensare a efficienti sistemi di protezione senza conoscere appieno i meccanismi che stanno alla base della risposta delle tubazioni alle sollecitazioni, siano esse interne od esterne, in relazione alla grande variabilità di situazioni e configurazioni che possono profilarsi con problematiche di dinamica non lineare. Ne consegue che le strategie efficaci per il controllo delle vibrazioni sono tuttora in fase di sviluppo. Le applicazioni ingegneristiche di settore riguardano tubi macroscopici e microscopici, di forme e materiali differenti e sottoposti a condizioni di lavoro diverse su configurazioni di supporto distinte: si percepisce la complessità di sviluppare un protocollo generale per analizzare il sistema (Hu Y.J., Zhu W., 2018 – Yuan J.R., Ding H., 2023 – Wen H.B. et al., 2023) e di identificare modelli che riescano a descrivere in maniera accurata o veritiera sia il comportamento del fluido che le sollecitazioni cui è soggetta la condotta, tenendo conto delle interazioni tra le diverse componenti del sistema e delle condizioni al contorno determinate dai sistemi di supporto (Mao X.Y. et al., 2021).

In generale, un tubo è un sistema soggetto a vibrazioni continue avente infiniti gradi di libertà e generalmente si utilizzano il principio generalizzato di Hamilton e la teoria della trave di Eulero-Bernoulli per scrivere un'equazione differenziale alle derivate parziali che rappresenti il modello dinamico descrittivo delle vibrazioni della condotta, vincolata alle estremità e soggetta a flessione trasversale. Le condizioni al contorno generalmente prevedono che le estremità

della condotta possano essere costituite da appoggio semplice, appoggio a rulli, cerniera o incastro.

Lo studio della dinamica del tubo modellato consiste nella valutazione dell'influenza che le condizioni al contorno hanno sulla frequenza di risonanza e sulle forme modali, nell'analisi della risposta alle vibrazioni in relazione sia alle configurazioni di sollecitazioni esterne molto diverse tra loro (Guo Y. et al., 2022) sia in funzione della geometria, delle connessioni e dei materiali costitutivi del tubo stesso. I metodi di analisi possono essere numerici (Zhu K. et al., 2022) oppure analitici approssimativi (Mao X. et al., 2020 – Zhu B. et al., 2023) e vengono utilizzati per progettare nuovi sistemi, ottimizzare i parametri di progetto e collaudare le infrastrutture esistenti.

I sistemi di controllo delle vibrazioni, in funzione della presenza o meno di input energetici, anche per le condotte possono essere distinti in attivi, passivi e semi attivi (Ding H., Ji J.C., 2023). I sistemi passivi includono a loro volta gli assorbitori, ai quali viene convogliata l'energia vibrazionale, gli smorzatori che dissipano energia e gli isolatori che riducono l'entità delle vibrazioni che raggiungono il tubo. Altri metodi utilizzati sono quelli che sfruttano per controllare le vibrazioni direttamente la configurazione del tubo stesso, dei suoi elementi di supporto e delle guarnizioni e anche la variazione della velocità del fluido transitante.

I sistemi passivi come gli assorbitori sono generalmente più convenienti da utilizzare in termini di costi, di semplicità di installazione e di collocazione rapportati alla loro efficienza (Ji J.C., Zhang N., 2010), considerando anche che usualmente le condotte sono sistemi compatti con esigui spazi liberi. La difficoltà sta nel calibrare il sistema, vista soprattutto la vasta possibilità di configurazioni e sollecitazioni dell'infrastruttura, che implicano un range di variabilità delle frequenze proprie molto ampio.

Considerando gli assorbitori a comportamento lineare, la loro installazione consiste nell'inserimento, all'interno dell'infrastruttura, di un ulteriore sistema di

vibrazione che viene fissato alla struttura principale e che, in reazione al manifestarsi delle vibrazioni, genera una forza sulla struttura primaria che riduce l'intensità delle oscillazioni. Gli assorbitori funzionano come TMD ovvero vengono sintonizzati ad una certa frequenza di risonanza, il che non lo rende molto conveniente se installato su un sistema primario che per sua natura lavora con un range di frequenze molto ampio. Per questa ragione, nel lavoro di Yu D.L. et al. del 2008 viene utilizzato il TMD in combinazione con il concetto di risonanza locale generata dal collegamento della struttura principale con oscillatori armonici dislocati periodicamente. Wu J.H. et al. nel 2021 ha utilizzato più TMD equidistanti e connessi alla condotta per sfruttare la teoria delle travi localmente risonanti come mostrato in **Fig. 3.1**.

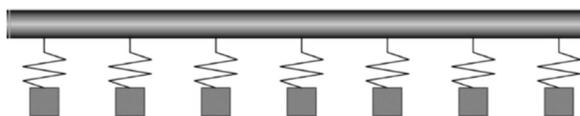


Fig. 3.1: schematizzazione di una condotta collegata ad un sistema di oscillatori localmente risonanti

3.2. CENNI SUI SISTEMI PERIODICI

Il controllo delle vibrazioni, tanto nell'ingegneria meccanica quanto nell'ingegneria strutturale, ha visto negli ultimi anni sempre più frequenti applicazioni della teoria dei sistemi periodici, ovvero quei sistemi strutturali che manifestano una certa forma di periodicità in termini di materiale costitutivo, di geometria interna oppure di condizioni al contorno (Hussein M. et al., 2014). Lo studio dei sistemi e dei materiali periodici affonda le sue radici nel campo dell'acustica e delle vibrazioni di materiali fonici; pertanto, non è inusuale anche nell'ingegneria strutturale parlare di strutture foniche quando sistemi ingegneristici presentano caratteristiche di funzionamento periodico e riferirsi alla

teoria di propagazione delle onde sonore o acustiche. In virtù del legame tra la fisica dei fononi e la dinamica dei materiali e delle strutture, il sistema si studia in termini di curve di dispersione del sistema periodico, ovvero diagrammi a bande che descrivono la propagazione delle onde libere all'interno di un mezzo elastico, in termini della relazione che intercorre tra la frequenza e il numero d'onda. Le strutture periodiche posseggono proprietà di filtraggio delle onde elastiche, le quali non possono propagarsi all'interno di alcuni intervalli di frequenza, detti band gaps, individuabili dall'andamento delle curve di dispersione.

Tra le applicazioni più interessanti, che hanno contribuito a mantenere attiva la ricerca sui sistemi periodici, si citano ad esempio quelle sui materiali compositi, considerati a comportamento periodico (Sun C.T. et al., 1968 – Nemat Nasser S., 1972) e le strutture aeronautiche, che presentano una periodicità geometrica per la presenza di nervature di rinforzo (Abrahamson A. L., 1973 - Mead D. J., 1973). Nell'ambito dell'ingegneria civile si menzionano le turbine multi-pala (Ewins D. J., 1973 - Griffin J. H., Hoosac T. M., 1984 - Castanier M. P. et al., 1997), le fondazioni periodiche di edifici (Talbot J. P., Hunt H. E. M., 2003 – Bao J. et al., 2012), edifici multipiano e ponti a più campate (Brun M. et al., 2013).

I metodi e i modelli per studiare le strutture periodiche variano a seconda del campo in cui avviene l'investigazione; nell'ingegneria strutturale viene utilizzato il modello di trave localmente risonante a partire dagli studi di Cremer e Leilich del 1953 sulla propagazione delle onde armoniche flessionali lungo una trave monodimensionale, poggiante su supporti equidistanti tra loro o da masse dislocate periodicamente (Xiao Y., Wen X., 2012 – Xiao Y. et al., 2013 – Hu G. et al., 2018 – Casalotti A. et al., 2018).

Tali sistemi vengono modellati al continuo o al discreto come travi di Eulero o di Timoshenko, mentre la presenza dei risonatori viene tenuta in conto mediante l'aggiunta di sottosistemi massa-molla, che possono avere uno o più gradi di libertà. La trave viene suddivisa idealmente in celle, ognuna delle quali è collegata

ad un risonatore, e si connette alle celle vicine attraverso un unico grado di libertà. Lo studio delle frequenze del sistema e dei modi di vibrare viene usualmente condotto tramite il Metodo della Matrice di Trasferimento, come sarà approfondito al paragrafo 3.7.1,

Alcuni esempi applicativi della teoria delle travi localmente risonanti per il controllo delle vibrazioni sono ad esempio le travi-sandwich con interposti risonatori (Chen J.S. et al., 2011), travi con metamateriali elastici (Zhu R. et al., 2014 – Pai P.F., 2010), travi principali collegate a travi secondarie, in qui queste ultime svolgono la funzione di risonatori (Xiao Y. et al., 2013). In base al numero di gradi di libertà del risonatore, si apriranno pari numero di *band gaps*.

3.3. LE CONDOTTE COME SISTEMI PERIODICI

Come accennato al paragrafo 3, le trattazioni ingegneristiche sulle condotte sono numerose e l'interesse è nato dapprima per le applicazioni che includevano i tubi degli scambiatori di calore o i per i sistemi di alimentazione del vapore ad esempio in oleodotti, centrali nucleari e le tubazioni che convogliano i fluidi tra le unità di trattamento nelle industrie chimiche e petrolifere (Koo G.H., Park Y.S., 1996). Tra le applicazioni successive, in ambito civile si possono menzionare, tra le altre, i sistemi di condotte che trasportano petrolio o gas naturale estesi per chilometri, i *marine risers*, i sistemi di collegamento e distribuzione tra le fonti, i serbatoi e le utenze per quanto concerne l'acqua sanitaria potabile. Ciò che i vari sistemi di condotte hanno in comune, a prescindere dal liquido convogliato e dall'utilizzo che ne viene fatto, è lo svilupparsi per grandi distanze spesso poggiando su supporti equidistanti, rendendo pertinente la definizione di sistemi a struttura periodica (Wu J.S., Shih P.Y., 2001 – Li B.H. et al., 2011).

Le condotte, lungo il loro sviluppo, possono essere interessate da fenomeni vibrazionali come eccitazioni dei supporti, esplosioni ed urti, che possono

pregiudicarne le prestazioni operative e la funzionalità, portando a danni e conseguenti perdite pericolose. Per tutti questi motivi, è fondamentale applicare un controllo sulle vibrazioni delle condotte adottando opportune strategie di mitigazione.

Generalmente, i sistemi di tubazioni possono essere interessati da vibrazioni longitudinali, flessionali, torsionali o da un accoppiamento degli stessi (Yu D., 2008), anche se usualmente ci si focalizza sulle conseguenze e la gestione delle vibrazioni flessionali. La dinamica delle condotte che trasportano fluidi è stata ampiamente studiata a partire dalla seconda metà degli anni Novanta (Koo G.H., Park Y.S., 1998 – Kang M.G., 2000), utilizzando come modello di base quello della trave su supporti elastici risonanti e utilizzando opportune condizioni al contorno elastiche (Li Y.D., Yang Y.R., 2014) o complesse (Liu M. et al., 2018). Tra le strategie di mitigazione delle vibrazioni, l'utilizzo di masse accordate garantisce risultati molto interessanti (Murugan Jaya M. et al., 2018), come è stato dimostrato dall'impiego di supporti elastici distribuiti periodicamente lungo lo sviluppo delle tubazioni oggetto di studio (Wu J.H. et al., 2021 – Fernandes R. et al., 2022 – Iqbal M. et al., 2021 - Iqbal M. et al., 2022), al fine di indurre la formazione di intervalli di frequenze in cui le onde elastiche non riescono a propagarsi, noti come *band gaps*. I risultati dell'accoppiamento tra sistemi periodici e dispositivi detti risonatori è stato studiato in varie declinazioni (Failla G. et al., 2020 – Russillo A.F, Failla G., 2020 - Russillo A.F., Failla G., 2021 - Russillo A.F., Failla G., 2022 – Burlon A., Failla G., 2022) utilizzando smorzatori a massa accordata aventi un grado di libertà con masse concentrate così come proposto recentemente da Iqbal et al. nel 2021 oppure utilizzando dissipatori con massa distribuita, impiegando ad esempio tubi secondari in accoppiamento ad ogni cella (Iqbal M. et al., 2022). Spesso è stato anche sperimentato come i *band gaps* possano essere generati combinando fenomeni di risonanza locale, ottenuti equidistanziando i risonatori, oppure con fenomeni di *Bragg scattering* dovuti all'impiego di materiali periodicamente variabili (Hu B. et al., 2020).

I dispositivi a massa accordata utilizzati per la mitigazione delle vibrazioni nei sistemi periodici soffrono delle stesse problematiche dei dispositivi impiegati in ambito strutturale in riferimento alla massa del sistema secondario, la quale deve essere paragonabile, secondo determinati rapporti noti, con quella del sistema primario. Le difficoltà realizzative implicate nel rispetto di tale condizione sono superabili avvalendosi dell'inerter introdotto da Smith nel 2002 e che, utilizzando l'inerzia rotazionale e non traslazionale data dalla differenza di accelerazione tra i due capi del dispositivo stesso, consente di ottenere risultati comparabili con l'utilizzo di masse fisiche superiori di circa trecento volte rispetto alla massa effettiva impiegata. Dispositivi basati sull'inserimento dell'inerter sono stati oggetto di studi nell'ambito della mitigazione delle vibrazioni strutturali, sia esso utilizzato singolarmente che in più dispositivi combinati, come riportato nel capitolo 2.

Al fine di ottenere lo smorzamento delle vibrazioni che interessano sistemi periodici costituiti da tubazioni, gli studi condotti propongono l'utilizzo di un dispositivo innovativo in cui sono combinati un inerter e delle molle elastiche, secondo due differenti configurazioni, le quali portano in entrambi i casi all'apertura di due *gaps* a basse frequenze, dedotte dalle analisi di dispersione delle onde elastiche condotte su un tipo di lunghezza indefinita. In particolare, il secondo intervallo di attenuazione è il *band gap* riconducibile alla risonanza locale e possiede caratteristiche di dispersione migliori, oltre al coinvolgere un ingente numero di frequenze; gli stessi estremi dell'intervallo possono essere pilotati con opportune scelte circa la frequenza di sintonizzazione del sistema, l'inerzia e il rapporto tra le rigidità delle molle del dispositivo, in modo da ottimizzare le prestazioni dell'inerter opportunamente collegato al suolo, configurazione che ne esalta le caratteristiche dissipative.

3.4. MODELLO

Vi sono numerosi esempi documentati di modelli e metodi di studio delle condotte per fluidi poggiano su supporti dislocati periodicamente. Per analizzare il caso in esame, è necessario scrivere l'equazione del moto che governa il problema delle condotte attraversate da un fluido in movimento. Nel paragrafo successivo si riporta la dimostrazione (Païdoussis M. P., 2014) dei passaggi analitici e delle assunzioni con cui si perviene all'equazione di governo.

3.4.1. SCRITTURA EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

Coordinate Euleriane (x, z)

Coordinate Lagrangiane (x_0, z_0)

Equilibrio lungo l'asse $(x_0, z_0) \equiv (x, 0)$

Deflessione laterale $w(x, t)$ oppure $w(x_0, t)$; ogni punto avrà coordinate $u(x, t)$ oppure $u(x_0, t)$

Se il punto P_0 dell'indeformata diventa P nella configurazione deformata, avrà

$$u = x - x_0 \quad w = z - z_0 \equiv z$$

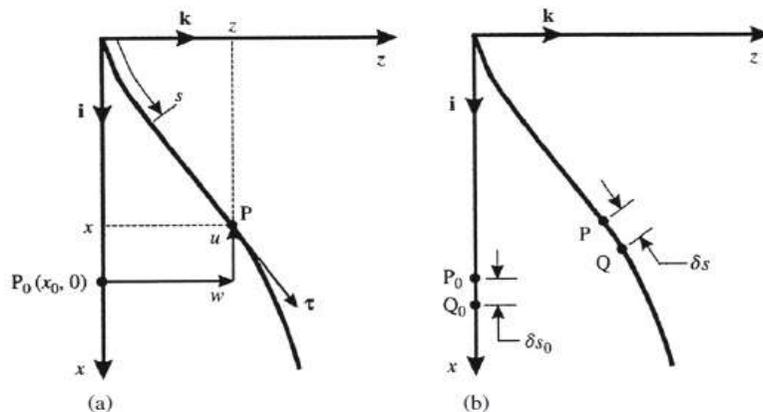


Fig. 3.2: (a) Coordinate nel sistema Euleriano (x, z) e Lagrangiano $(x_0, z_0) \equiv (x, 0)$, in cui l'asse x_0 è sovrapposto all'asse x , mostrando così la deviazione di un punto $P_0 = P_0(x_0, 0)$ in $P(x, z)$ e la definizione di u e w ; (b) diagramma di derivazione della condizione di inestensibilità.

$$\begin{aligned}
 (\delta s)^2 &= (\delta x)^2 + (\delta z)^2 \\
 (\delta s_0)^2 &= (\delta x_0)^2 + (\delta z_0)^2 = (\delta x_0)^2
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

w è molto piccolo.

Derivazione newtoniana

Nella derivazione Newtoniana si assume $x = x_0 = s$ e $w = w(x, t)$

I parametri di interesse sono L, S, A, m, EI, M, U

L = lunghezza del tratto considerato

S = perimetro interno

A = area di flusso

m = massa per unità di lunghezza

EI = rigidezza flessionale

M = massa del fluido

U = velocità assiale del fluido

L'ipotesi che si fa è che $w(x, t)$ sia così piccolo che $x \approx s$

Si considera un elemento δs di fluido e di condotta

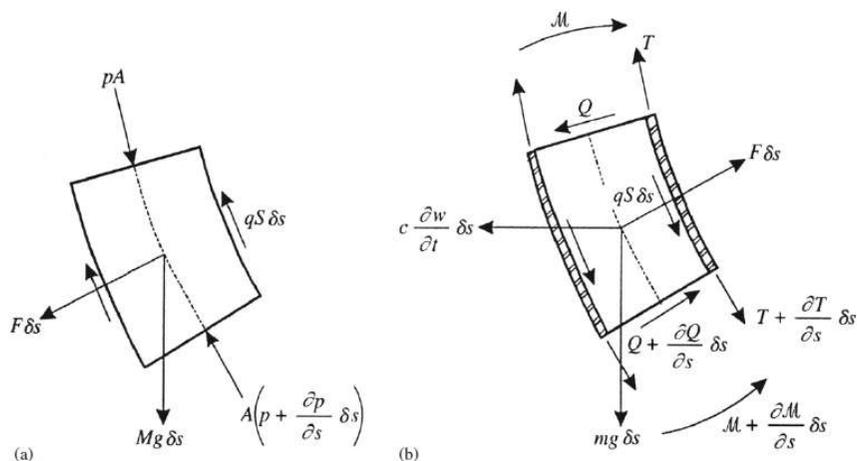


Fig. 3.3: (a) forze agenti su un elementino δs di fluido; (b) forze e momenti sull'elemento corrispondente del tubo.

Si consideri l'elemento δs di fluido, in cui si ha una pressione $p = p(s, t)$ variabile per perdite dovute alla frizione. $F \delta s$ sono le forze di reazione della condotta sul fluido, normali all'elementino di fluido stesso. $qS \delta s$ sono le azioni tangenziali dovute al taglio mentre $M g \delta s$ è la forza di gravità in x .

Considerando la scomposizione delle forze in x e z e le relazioni trigonometriche che intercorrono tra i cateti e l'ipotenusa del triangolo dell'equilibrio

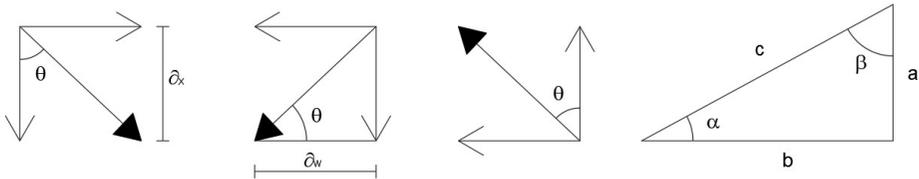


Fig. 3.4: scomposizione delle forze in x e z

$$a = c \sin \alpha = c \cos \beta \quad b = c \sin \beta = c \cos \alpha \quad \theta = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.2)$$

Si può scrivere la seconda legge di Newton in x e in z .

In x si ha:

$$p A \cos \theta - p A \cos \theta - A \frac{\partial p}{\partial s} \delta s \cos \theta - q S \delta s \cos \theta + F \delta s \sin \theta + M g \delta s = M a_{fx} \delta s \quad (3.3)$$

Dove a_{fx} è l'accelerazione del fluido in x . Eliminando i termini uguali ed opposti, ricordando che $x \approx s$ e che per angoli piccoli $\cos \theta \approx 1$ e $\sin \theta \approx \theta$ con $\theta = \partial w / \partial x$, si ha:

$$-A \frac{\partial p}{\partial s} \delta s - q S \delta s + F \delta s \frac{\partial w}{\partial x} + M g \delta s = M a_{fx} \delta s \quad (3.4)$$

$$-A \frac{\partial p}{\partial x} - q S + F \frac{\partial w}{\partial x} + M g = M a_{fx} \quad (3.5)$$

La (3.5) è l'equazione di Newton in x del fluido.

In z si ha:

$$p A \sin \theta - A \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} \delta s \right) \sin \theta - q S \delta s \sin \theta - F \delta s \cos \theta = M a_{fz} \delta s \quad (3.6)$$

$$-A \frac{\partial p}{\partial s} \delta s \frac{\partial w}{\partial x} - q S \delta s \frac{\partial w}{\partial x} - F \delta s = M a_{fz} \delta s \quad (3.7)$$

$$-A \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial x} - q S \frac{\partial w}{\partial x} - F = M a_{fz} \quad (3.8)$$

Con $\partial s = \partial x$

$$-A \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial w}{\partial x} \right) - q S \frac{\partial w}{\partial x} - F = M a_{fz} \quad (3.9)$$

La (3.9) rappresenta l'equazione di Newton in z per il fluido.

Per la condotta bisogna invece considerare l'azione della tensione longitudinale T , del taglio Q , del momento M , la dissipazione interna di Kelvin-Voigt per la quale $\sigma = E \varepsilon + E^* \left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right)$ e la dissipazione dovuta alla viscosità del fluido $c \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)$. Si possono scrivere le equazioni di Newton in x e in z .

In x :

$$-T \cos \theta + \left(T + \frac{\partial T}{\partial s} \delta s \right) \cos \theta + Q \sin \theta - \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial s} \delta s \right) \sin \theta + m g \delta s + q S \delta s \cos \theta - F \delta s \sin \theta = m a_{px} \delta s \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} \delta s - \frac{\partial Q}{\partial s} \delta s \frac{\partial w}{\partial x} + m g \delta s + q S \delta s - F \delta s \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (3.11)$$

In cui si considera nulla l'accelerazione della condotta in direzione x . Inoltre, si trascura la deformazione a taglio trasversale per le ipotesi della trave di Eulero Bernoulli, insieme all'inerzia rotazionale, e si perviene a:

$$\frac{\partial T}{\partial x} + m g - F \frac{\partial w}{\partial x} + q S = 0 \quad (3.12)$$

La (3.12) è l'equazione di Newton alla traslazione in x della condotta.

In z :

$$\begin{aligned} -T \sin \theta + \left(T + \frac{\partial T}{\partial s} \delta s \right) \sin \theta - Q \cos \theta + \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial s} \delta s \right) \cos \theta + F \delta s \cos \theta + \\ + q S \delta s \sin \theta - c \frac{\partial w}{\partial t} \delta s = m a_{pz} \delta s \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial Q}{\partial x} + F + q S \frac{\partial w}{\partial x} - c \frac{\partial w}{\partial t} = m a_{pz} \quad (3.14)$$

La (3.14) è l'equazione di Newton alla traslazione in z per la condotta.

In aggiunta, è utile considerare l'equazione:

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x} = - \left(E + E^* \frac{\partial}{\partial t} \right) I \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (3.15)$$

3.4.2. CALCOLO DELL'ACCELERAZIONE DEL FLUIDO

L'ipotesi che si fa è quella di flusso a pistone: un'asta infinitamente flessibile viaggia attraverso il tubo e tutti i punti del fluido hanno una velocità U rispetto al tubo. Le deviazioni del tubo hanno lunghezza d'onda grande rispetto al diametro D , e il tubo è sottile ovvero L/D alto (si possono allora trascurare gli effetti secondari nel fluido).

Considerando \underline{r} il vettore posizione di un punto rispetto all'origine, con \underline{i} e \underline{k} versori posizione degli assi:

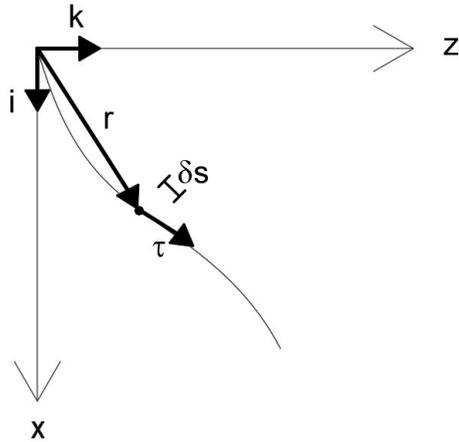


Fig. 3.5: Vettore posizione di un punto della condotta rispetto all'origine e vettore tangente al centro del tubo

$$\underline{r} = x(t)\underline{i} + z(t)\underline{k} \quad (3.16)$$

La velocità della condotta è:

$$\underline{V}_p = \frac{\partial \underline{r}}{\partial t} = \dot{x}\underline{i} + \dot{z}\underline{k} \quad (3.17)$$

La velocità del centro dell'elementino di fluido è:

$$\underline{V}_f = \underline{V}_p + U\underline{\tau} \quad (3.18)$$

Con $\underline{\tau}$ vettore tangente al centro del tubo

$$\underline{\tau} = \frac{\partial x}{\partial s}\underline{i} + \frac{\partial z}{\partial s}\underline{k} \quad (3.19)$$

Sostituendo la (3.13) e la (3.11) nella (3.12) si ottiene:

$$\underline{V}_f = \underline{V}_p + U\underline{\tau} = \dot{x}\underline{i} + \dot{z}\underline{k} + U\left(\frac{\partial x}{\partial s}\underline{i} + \frac{\partial z}{\partial s}\underline{k}\right) = \frac{\partial x}{\partial t}\underline{i} + \frac{\partial z}{\partial t}\underline{k} + U\left(\frac{\partial x}{\partial s}\underline{i} + \frac{\partial z}{\partial s}\underline{k}\right) \quad (3.20)$$

$$\underline{V}_f = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial s}\right)(\dot{x}\underline{i} + \dot{z}\underline{k}) \equiv \frac{D\underline{r}}{Dt} \quad (3.21)$$

In cui è stato introdotto l'operatore D/Dt che rappresenta la derivata materiale per l'elemento di fluido. Ricordando che $z = w$, $\frac{\partial x}{\partial s} \approx 1$ e $\frac{\partial x}{\partial t} \approx 0$

allora:

$$\underline{V}_f = \frac{\partial x}{\partial t} \underline{i} + \frac{\partial z}{\partial t} \underline{k} + U \left(\frac{\partial x}{\partial s} \underline{i} + \frac{\partial z}{\partial s} \underline{k} \right) = \frac{\partial z}{\partial t} \underline{k} + U \left(\underline{i} + \frac{\partial z}{\partial s} \underline{k} \right) \quad (3.22)$$

$$\underline{V}_f = U \underline{i} + \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial s} \right) \underline{k} \quad (3.23)$$

L'accelerazione allora vale:

$$\underline{a}_f = \frac{D^2 \underline{r}}{Dt^2} = \frac{\partial U}{\partial t} \underline{i} + \left[\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial s} \right]^2 w \underline{k} \quad (3.24)$$

Con:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial s} \right]^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + 2U \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial s} \quad (3.25)$$

Si può porre:

$$\underline{a}_f = \frac{\partial U}{\partial t} \underline{i} + \left[\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial s} \right]^2 w \underline{k} = a_{fx} \underline{i} + a_{fz} \underline{k} \quad (3.26)$$

$$a_{fx} = \frac{\partial U}{\partial t} \quad a_{fz} = \left[\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial s} \right]^2 w \quad (3.27)$$

Sempre con $x \approx s$, si stanno ignorando le dimensioni radiali del tubo.

L'accelerazione della condotta in direzione z è invece (in direzione x si considera nulla):

$$a_{pz} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.28)$$

3.4.3. DIMOSTRAZIONE EQUAZIONE DEL MOTO

Si richiamano le equazioni di equilibrio soprascritte tanto per l'elementino di fluido quanto per l'elementino di condotta:

$$-A \frac{\partial p}{\partial x} - qS + F \frac{\partial w}{\partial x} + Mg = M a_{fx} \quad (3.5)$$

$$-A \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial w}{\partial x} \right) - qS \frac{\partial w}{\partial x} - F = M a_{fz} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} + mg - F \frac{\partial w}{\partial x} + qS = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial Q}{\partial x} + F + qS \frac{\partial w}{\partial x} - c \frac{\partial w}{\partial t} = m a_{pz} \quad (3.14)$$

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x} = - \left(E + E^* \frac{\partial}{\partial t} \right) I \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (3.15)$$

A questo punto si possono combinare la (3.9), la (3.14) e la (3.15) tenendo conto delle accelerazioni trovate; in particolare si sommano la (3.9) e la (3.14),

sostituendo ad a_{pz} e ad a_{fz} , ricordando inoltre che $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}$ per poter utilizzare

la (3.15).

$$m a_{pz} + M a_{fz} + c \frac{\partial w}{\partial t} - \cancel{qS \frac{\partial w}{\partial x}} - \cancel{F} - \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \cancel{qS \frac{\partial w}{\partial x}} + \cancel{F} + \quad (3.29)$$

$$+ A \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0$$

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + M \left[\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right]^2 w + c \frac{\partial w}{\partial t} + \left(E + E^* \frac{\partial}{\partial t} \right) I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x} \left((T - pA) \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.30)$$

Invece sommando la (3.5) e la (3.12) e sostituendo a a_{fx} si ottiene:

$$-M a_{fx} + Mg + \cancel{F \frac{\partial w}{\partial x}} - \cancel{qS} - A \frac{\partial p}{\partial x} - \cancel{F \frac{\partial w}{\partial x}} + \cancel{qS} + mg + \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (3.31)$$

$$-M \frac{\partial U}{\partial t} + (M + m)g + \frac{\partial}{\partial x}(T - pA) = 0 \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(T - pA) = M \frac{\partial U}{\partial t} - (M + m)g \quad (3.33)$$

Integrando la (3.33) da x a L :

$$(T - pA)|_{x=L} - (T - pA) = \left[M \frac{\partial U}{\partial t} - (M + m)g \right] (L - x) \quad (3.34)$$

Considerando una condotta bloccata alle estremità, si possono fare le seguenti considerazioni:

- $T = 0$ in L se non vi è applicata una forza \bar{T} ;
- $p = 0$ in L se all'estremità il fluido è a contatto con l'atmosfera, altrimenti $p = \bar{p}$;
- Se la condotta è fissata alle estremità, per la pressurizzazione nasce la *tensile force* che per tubo sottile vale $2v\bar{p}A$ con v coefficiente di Poisson.

$$(T - pA) = \bar{T} - \bar{p}A(1 - 2v\delta) \left[M \frac{\partial U}{\partial t} - (M + m)g \right] (L - x) \quad (3.35)$$

In cui si introduce il termine δ , che assume valore nullo se non ci sono vincoli al moto assiale in $x = L$, altrimenti gli si assegna valore unitario e contestualmente si ha la presenza di \bar{T} e \bar{p} .

Se, riordinando la (3.30), si sostituisce a $(T - pA)$ tenendo conto della (3.33), si ha:

$$\left(E + E^* \frac{\partial}{\partial t} \right) I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x} \left((T - pA) \frac{\partial w}{\partial x} \right) + M \left[\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right]^2 w + c \frac{\partial w}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.36)$$

$$\left(E + E^* \frac{\partial}{\partial t} \right) I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial(T - pA)}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} - (T - pA) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} +$$

$$+ M \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + U^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2U \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x} \right] w + c \frac{\partial w}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.37)$$

$$\left(E + E^* \frac{\partial}{\partial t} \right) I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left\{ MU^2 - \bar{T} + \bar{p}A(1 - 2\nu\delta) - \left[(M + m)g - M \frac{\partial U}{\partial t} \right] (L - x) \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} +$$

$$+ \underbrace{\left[-\frac{\partial(T - pA)}{\partial x} + M \frac{\partial U}{\partial t} \right]}_{(M+m)g} \frac{\partial w}{\partial x} + 2MU \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + c \frac{\partial w}{\partial t} + (M + m) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.38)$$

$$\left(E + E^* \frac{\partial}{\partial t} \right) I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left\{ MU^2 - \bar{T} + \bar{p}A(1 - 2\nu\delta) - \left[(M + m)g - M \frac{\partial U}{\partial t} \right] (L - x) \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} +$$

$$+ (M + m)g \frac{\partial w}{\partial x} + 2MU \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + c \frac{\partial w}{\partial t} + (M + m) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.39)$$

Si sottolinea che in questa formulazione non viene considerato il fluido come viscoso, ma si può dimostrare facilmente che la viscosità del fluido influenza meno che marginalmente il risultato.

La (3.39) è l'equazione che governa il moto del fluido in condotta. Trascurando le forze di gravità, la dissipazione, gli effetti di tensione e pressurizzazione, si arriva alla nota forma:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + MU^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2MU \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (M + m) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.40)$$

3.5. IL PROBLEMA DIMENSIONALE: LA CONDOTTA E I RISONATORI

3.5.1. EQUAZIONI DEL SISTEMA CONDOTTA-RISONATORI

L'equazione di governo delle vibrazioni flessionali per una condotta, assimilabile ad una trave di Eulero, in cui transita un fluido alla velocità costante v è pertanto:

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + m_f v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2m_f v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + (m_p + m_f) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (3.41)$$

In cui u è lo spostamento trasversale, E è il modulo di Young del materiale di cui è costituita la condotta, I è il momento di Inerzia rispetto all'asse perpendicolare all'asse del tubo, EI è la rigidezza flessionale della condotta, m_p e m_f sono rispettivamente la massa per unità di lunghezza del tubo e del fluido circolante.

Nello studio proposto si considera la condotta poggiante su dispositivi risonanti posti alla medesima distanza a l'uno dall'altro (**Fig. 3.6**)

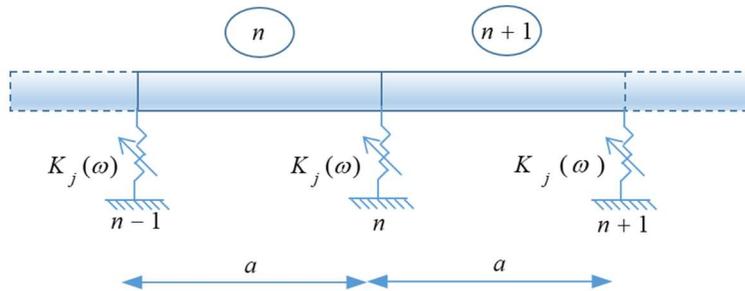


Fig. 3.6: Condotta di lunghezza infinita, poggiante su supporti risonanti con inerter

Le tipologie di supporti considerate sono due; in entrambe le configurazioni, sono presenti un inerter e due molle disposte in serie o in parallelo, a seconda che ci si riferisca al dispositivo A oppure al dispositivo B (**Fig. 3.7**).

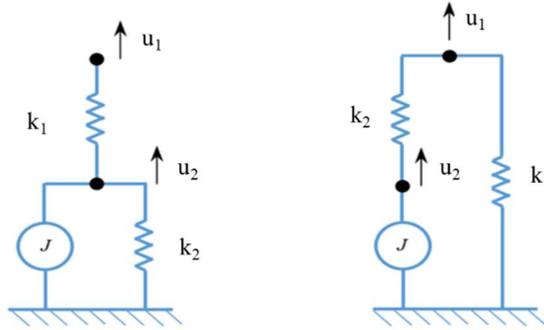


Fig. 3.7: Risonatori in configurazione A (sinistra) e in configurazione B (destra)

Si introducono le seguenti quantità: u_n lo spostamento interno all'ascissa $x_n = na$ in corrispondenza dell' n -esimo risonatore e diverso a seconda che si tratti della configurazione A o B, J è l'inertanza, k_1 e k_2 sono le rigidezze delle molle elastiche, $r_n = -f_n$ denota la forza di reazione esterna esercitata sulla condotta dall'azione dell' n -esimo risonatore con inerter. Nei due casi, le forze f_n sono date da:

$$a) \quad f_n = k_1 [u_1(x_n, t) - u_2(t)] = k_2 u_2(t) + J \ddot{u}_2(t) = -r_n(t) \quad (3.42)$$

$$b) \quad f_n = k_1 u_2(x_n, t) + k_2 [u_2(x_n, t) - u_1(t)] = k_1 u_2(x_n, t) + J \ddot{u}_1(t) = -r_n(t) \quad (3.43)$$

3.5.2. LE RIGIDENZE EQUIVALENTI DEI RISONATORI

È possibile descrivere le caratteristiche del risonatore in termini di rigidezza equivalente, considerando un dispositivo governato dalla legge $F = k_{equ}u$. Per ottenere le rigidezze equivalenti, si scrivono le equazioni (3.42) e (3.43) nel dominio della frequenza. Per il risonatore A si ha:

$$f_n = k_1 [U_1(x_n, \omega) - U_2(\omega)] = (k_2 - J\omega^2)U_1(\omega) \quad (3.44)$$

Da cui si ricava:

$$k_1 U_1(x_n, \omega) - k_1 U_2(\omega) = k_2 U_2(\omega) - J\omega^2 U_2(\omega) \quad (3.45)$$

$$k_1 U_1(x_n, \omega) = (k_1 + k_2 - J\omega^2) U_2(\omega) \quad (3.46)$$

$$U_2(\omega) = \left(\frac{k_1}{k_1 + k_2 - J\omega^2} \right) U_1(x_n, \omega) \quad (3.47)$$

Sostituendo la (3.47) nella (3.44) si ottiene:

$$f_n = k_1 \left[U_1(x_n, \omega) - \left(\frac{k_1}{k_1 + k_2 - J\omega^2} \right) U_1(x_n, \omega) \right] \quad (3.48)$$

$$f_n = \left[k_1 - \left(\frac{k_1^2}{k_1 + k_2 - J\omega^2} \right) \right] U_1(x_n, \omega) \quad (3.49)$$

$$f_n = \left[\frac{k_1 k_2 + \cancel{k_1^2} - J\omega^2 k_1 + \cancel{k_1^2}}{k_1 + k_2 - J\omega^2} \right] U_1(x_n, \omega) \quad (3.50)$$

$$f_n = \left[\frac{k_1 (k_2 - J\omega^2)}{k_1 + k_2 - J\omega^2} \right] U_1(x_n, \omega) \quad (3.51)$$

$$f_n = K_a(\omega) U_1(x_n, \omega) \quad (3.52)$$

Dove:

$$K_a(\omega) = \left[\frac{k_1 (k_2 - J\omega^2)}{k_1 + k_2 - J\omega^2} \right] \quad (3.53)$$

La (3.53) è la rigidità equivalente del dispositivo nella configurazione A.

Per il risonatore nella configurazione B, scrivendo la (3.43) nel dominio della frequenza, si ha:

$$f_n = k_1 U_2(x_n, \omega) + k_2 [U_2(x_n, \omega) - U_1(\omega)] = k_1 U_2(x_n, \omega) - J\omega^2 U_1(\omega) \quad (3.54)$$

$$\cancel{k_1 U_2(x_n, \omega)} + k_2 U_2(x_n, \omega) - k_2 U_1(\omega) = \cancel{k_1 U_2(x_n, \omega)} - J\omega^2 U_1(\omega) \quad (3.55)$$

$$[k_2 - J\omega^2] U_1(\omega) = k_2 U_2(x_n, \omega) \quad (3.56)$$

$$U_1(\omega) = \left[\frac{k_2}{k_2 - J\omega^2} \right] U_2(x_n, \omega) \quad (3.57)$$

Sostituendo la (3.57) nella (3.54) si ottiene:

$$f_n = k_1 U_2(x_n, \omega) - J\omega^2 \left[\frac{k_2}{k_2 - J\omega^2} \right] U_2(x_n, \omega) \quad (3.58)$$

$$f_n = \left[k_1 - \frac{J\omega^2 k_2}{k_2 - J\omega^2} \right] U_2(x_n, \omega) \quad (3.59)$$

Riscrivendo:

$$k_1 - \frac{J\omega^2 k_2}{k_2 - J\omega^2} = \frac{k_1(k_2 - J\omega^2) - J\omega^2 k_2}{k_2 - J\omega^2} = \frac{k_1 k_2 - (k_1 + k_2)J\omega^2}{k_2 - J\omega^2} \quad (3.60)$$

Si perviene a:

$$f_n = K_b(\omega) U_2(x_n, \omega) \quad (3.61)$$

In cui:

$$K_b(\omega) = \frac{k_1 k_2 - (k_1 + k_2)J\omega^2}{k_2 - J\omega^2} \quad (3.62)$$

È la rigidezza equivalente del dispositivo B.

3.5.3. INDIVIDUAZIONE DEI PARAMETRI DEI RISONATORI

Da quanto è emerso nei paragrafi precedenti, i risonatori sono caratterizzati dall'inertanza J e dalle due rigidzze k_1 e k_2 ; essi, inoltre, vengono sintonizzati ad una determinata frequenza $\omega_{a,b}$. Le frequenze possono essere legate tra loro, in modo tale da diminuire le incognite del problema; si pone pertanto:

$$k_2 = \alpha k_1 \quad (3.63)$$

Generalmente, la frequenza di tuning viene scelta; inoltre deve essere noto uno dei due parametri tra l'inertanza disponibile e la rigidzza di una delle due molle. A questo punto, dalle equazioni (3.45) e (3.56) si hanno le equazioni

caratteristiche rispettivamente per il risonatore A e per il risonatore B, da porre uguali a zero:

$$k_1 U_2(\omega) + k_2 U_2(\omega) - J \omega^2 U_2(\omega) = 0 \rightarrow (1 + \alpha)k_1 - J \omega^2 = 0 \quad (3.64)$$

$$[k_2 - J \omega^2] U_1(\omega) = 0 \rightarrow \alpha k_1 - J \omega^2 = 0 \quad (3.65)$$

Risolvendo le equazioni di secondo grado in ω , si trovano per ciascuna due soluzioni, delle quali si prende quella positiva e si otterrà rispettivamente:

$$\omega_a = \frac{\sqrt{k_1} \sqrt{1 + \alpha}}{\sqrt{J}} \quad (3.66)$$

$$\omega_b = \frac{\sqrt{k_1}}{\sqrt{J}} \quad (3.67)$$

Le frequenze ω_a e ω_b vengono scelte pari alla frequenza di tuning richiesta e pertanto, nota o la rigidezza di una molla oppure l'inertanza disponibile, vengono determinati tutti i parametri caratteristici del risonatore utilizzato.

3.6. ADIMENSIONALIZZAZIONE DEL PROBLEMA

Con l'intento di pervenire ad una formulazione più generale del problema, è stato scelto di adimensionalizzare le equazioni che intervengono; le quantità relative a spostamento, ascissa, tempo, massa e velocità sono state adimensionalizzate come segue:

$$u = \frac{w}{a} \quad \xi = \frac{x}{a} \quad \tau = \Omega t \quad \mu_f = \frac{m_f}{m_p + m_f} = \frac{m_f}{m_t} \quad \eta = \frac{v}{\Omega a} \quad (3.68)$$

In cui compare la posizione:

$$\Omega = \sqrt{\frac{EI}{m_t a^4}} \quad (3.69)$$

Sostituendo le quantità alla (3.68) nella (3.41) si ha:

$$EI \frac{a}{a^4} \frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4} + m_f v^2 \frac{a}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2m_f v \frac{a}{a} \Omega \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \tau} + (m_f + m_p) a \Omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0 \quad (3.70)$$

$$\frac{EI}{a^3} \frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4} + \frac{m_f v^2}{a} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2m_f v \Omega \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \tau} + m_t a \Omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0 \quad (3.71)$$

dividendo per $m_t a$ si ottiene:

$$\frac{EI}{m_t a^4} \frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4} + \frac{m_f v^2}{m_t a} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{m_f v}{m_t a} \Omega \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \tau} + \Omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0 \quad (3.72)$$

$$\Omega^2 \frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4} + \mu_f \frac{v^2}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\mu_f \frac{v \Omega}{a} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \tau} + \Omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0 \quad (3.73)$$

Dividendo tutto per Ω^2 e ponendo:

$$\eta = \frac{v}{\Omega a} = \frac{v}{a} \sqrt{\frac{m_t a^4}{EI}} = \sqrt{\frac{v^2 m_t a^4}{a^2 EI}} = \sqrt{\frac{v^2 m_t a^2}{EI}} = v a \sqrt{\frac{m_t}{EI}} \quad (3.74)$$

si ha:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4} + \mu_f \eta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\mu_f \eta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0 \quad (3.75)$$

La (3.75) è l'equazione del moto in forma adimensionale di una condotta di lunghezza indefinita soggetta a vibrazioni libere. Nel caso di onde armoniche, la soluzione è:

$$u(\xi, \tau) = U e^{i(\bar{\omega}\tau - \bar{q}\xi)} \quad (3.76)$$

In cui $\bar{\omega} = \omega/\Omega$ è la frequenza normalizzata. Sostituendo la (3.76) nella (3.75) si ottiene:

$$i^4 \bar{q}^4 U e^{i(\bar{\omega}\tau - \bar{q}\xi)} + i^2 \mu_f \eta^2 \bar{q}^2 U e^{i(\bar{\omega}\tau - \bar{q}\xi)} - 2\mu_f \eta i^2 \bar{\omega} \bar{q} U e^{i(\bar{\omega}\tau - \bar{q}\xi)} - \bar{\omega}^2 U e^{i(\bar{\omega}\tau - \bar{q}\xi)} = 0 \quad (3.77)$$

Sapendo che $i^2 = -1$ e dividendo tutti i termini per $U e^{i(\bar{\omega}\tau - \bar{q}\xi)}$, si ricava la relazione di dispersione:

$$\bar{q}^4 - \mu_f \eta^2 \bar{q}^2 + 2\mu_f \eta \bar{\omega} \bar{q} - \bar{\omega}^2 = 0 \quad (3.78)$$

In cui $\bar{q}_j = a q_j$ è il vettore d'onda normalizzato, dove \bar{q}_j ($j = 1, 2, 3, 4$). Per ogni valore di $\bar{\omega}$, ci saranno quattro radici del vettore d'onda, due radici reali differenti e due complesse e coniugate (Yu et al., 2008).

$$\bar{q}_1 = \bar{q}_d \quad \bar{q}_2 = -\bar{q}_u \quad \bar{q}_3 = \bar{q}_R + i\bar{q}_I \quad \bar{q}_4 = \bar{q}_R - i\bar{q}_I \quad (3.79)$$

Le radici reali descrivono la propagazione delle vibrazioni lungo il tubo nelle due direzioni, positiva e negativa; le radici complesse indicano un campo di frequenze in cui si ha un decadimento.

La soluzione armonica generale dell'equazione è:

$$u(\xi, \tau) = e^{i\bar{\omega}\tau} \left[\Psi^{(1)} e^{-i\bar{q}_1\xi} + \Psi^{(2)} e^{-i\bar{q}_2\xi} + \Psi^{(3)} e^{-i\bar{q}_3\xi} + \Psi^{(4)} e^{-i\bar{q}_4\xi} \right] \quad (3.80)$$

Si scrivono in forma adimensionale anche le rigidzze equivalenti dei due risonatori studiati. Per la configurazione A, si dividono entrambi i membri dell'equazione (3.53) per $\Omega^2 m_t a$ e si pone:

$$\frac{K_a(\omega)}{\Omega^2 m_t a} = \chi_a(\bar{\omega}) \quad (3.81)$$

In cui $\chi_a(\bar{\omega})$ è la rigidzza equivalente del risonatore A normalizzata. Si ottiene:

$$\chi_a(\bar{\omega}) = \frac{1}{\left(\Omega^2 m_t a \right)} \frac{k_1 (k_2 - J\omega^2)}{k_1 + k_2 - J\omega^2} \quad (3.82)$$

Dividendo numeratore e denominatore per $(\Omega^2 m_t a)^2$:

$$\chi_a(\bar{\omega}) = \frac{\frac{k_1}{\Omega^2 m_t a} \left(\frac{k_2}{\Omega^2 m_t a} - \frac{J \omega^2}{\Omega^2 m_t a} \right)}{\frac{k_1}{\Omega^2 m_t a} + \frac{k_2}{\Omega^2 m_t a} - \frac{J \omega^2}{\Omega^2 m_t a}} \quad (3.83)$$

$$\chi_a(\bar{\omega}) = \frac{\lambda_1 (\lambda_2 - \mu_j \bar{\omega}^2)}{(\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_j \bar{\omega}^2)} \quad (3.84)$$

ove si sono introdotte le due rigidezze adimensionali λ_1, λ_2 e il termine adimensionale μ_j legato all'inertanza:

$$\lambda_1 = \frac{k_1}{\Omega^2 a m_t} \quad \lambda_2 = \frac{k_2}{\Omega^2 a m_t} \quad \mu_j = \frac{J}{m_t a} \quad (3.85)$$

Si impone inoltre che le due rigidezze del sistema siano tra loro legate da un parametro α ; viene introdotta la frequenza adimensionale $\bar{\omega}_a$ del risonatore con configurazione a , conoscendo la frequenza propria del dispositivo dimensionale ω_a :

$$\lambda_2 = \alpha \lambda_1 \quad \bar{\omega}_a = \frac{\omega_a}{\Omega} \quad \omega_a^2 = \frac{k_1 + k_2}{J} \quad (3.86)$$

Dividendo ambo i membri dell'espressione di ω_a^2 per $\Omega^2 m_t a$, si ottiene:

$$\bar{\omega}_a^2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\mu_j} = \frac{(1 + \alpha) \lambda_1}{\mu_j} \quad (3.87)$$

Da cui:

$$\lambda_1 = \frac{\bar{\omega}_a^2 \mu_j}{(1 + \alpha)} \quad (3.88)$$

Sostituendo la (3.88) nella (3.84):

$$\chi_a(\bar{\omega}) = \frac{\frac{\mu_j \bar{\omega}_a^2}{(1+\alpha)} \left(\frac{\alpha}{(1+\alpha)} \mu_j \bar{\omega}_a^2 - \mu_j \bar{\omega}^2 \right)}{\left(\frac{\mu_j \bar{\omega}_a^2}{(1+\alpha)} + \alpha \frac{\mu_j \bar{\omega}_a^2}{(1+\alpha)} - \mu_j \bar{\omega}^2 \right)} \quad (3.89)$$

$$\chi_a(\bar{\omega}) = \frac{\frac{\mu_j \bar{\omega}_a^2}{(1+\alpha)} \left(\frac{\alpha}{(1+\alpha)} \mu_j \bar{\omega}_a^2 - \mu_j \bar{\omega}^2 \right)}{\left(\frac{(1+\alpha)}{(1+\alpha)} \mu_j \bar{\omega}_a^2 - \mu_j \bar{\omega}^2 \right)} \quad (3.90)$$

Semplificando numeratore e denominatore per μ_j e dividendo per $\bar{\omega}_a^2$:

$$\chi_a(\bar{\omega}) = \frac{\frac{1}{(1+\alpha)} \left(\frac{\alpha}{(1+\alpha)} \mu_j \bar{\omega}_a^2 - \mu_j \bar{\omega}^2 \right)}{1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}_a^2}} \quad (3.91)$$

In definitiva, la rigidezza equivalente adimensionale del risonatore in configurazione A è:

$$\chi_a(\bar{\omega}) = \frac{\mu_j \bar{\omega}_a^2 \left(\frac{1}{(1+\alpha)} \right) \left(\frac{\alpha}{(1+\alpha)} - \frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}_a^2} \right)}{1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}_a^2}} \quad (3.92)$$

Per il risonatore con configurazione B, dividendo la (3.62) per $\Omega^2 m_t a$ e ponendo:

$$\frac{K_b(\omega)}{\Omega^2 m_t a} = \chi_b(\bar{\omega}) \quad (3.93)$$

In cui $\chi_b(\bar{\omega})$ è la rigidezza equivalente adimensionalizzata del dispositivo B.

Si ha:

$$\chi_b(\omega) = \frac{1}{\Omega^2 m_t a} \frac{k_1 k_2 - (k_1 + k_2) J \omega^2}{k_2 - J \omega^2} \quad (3.94)$$

Dividendo numeratore e denominatore per $(\Omega^2 m_t a)^2$:

$$\chi_b(\omega) = \frac{\frac{k_1}{\Omega^2 m_t a} \frac{k_2}{\Omega^2 m_t a} - \left(\frac{k_1}{\Omega^2 m_t a} + \frac{k_2}{\Omega^2 m_t a} \right) \frac{J \omega^2}{m_t a \Omega^2}}{\frac{k_2}{\Omega^2 m_t a} - \frac{J \omega^2}{\Omega^2 m_t a}} \quad (3.95)$$

$$\chi_b(\bar{\omega}) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \mu_j \bar{\omega}^2}{\lambda_2 - \mu_j \bar{\omega}^2} \quad (3.96)$$

Introdotta la frequenza adimensionale $\bar{\omega}_b$ del risonatore con configurazione B, conoscendo la frequenza propria del dispositivo dimensionale:

$$\bar{\omega}_b = \frac{\omega_b}{\Omega} \quad \bar{\omega}_b^2 = \frac{\lambda_2}{\mu_j} = \frac{\alpha \lambda_1}{\mu_j} \quad (3.97)$$

Ricordando che $\lambda_2 = \alpha \lambda_1$, si riscrive la (3.96) come segue:

$$\chi_b(\bar{\omega}) = \frac{\alpha \lambda_1^2 - (1 + \alpha) \lambda_1 \mu_j \bar{\omega}^2}{\alpha \lambda_1 - \mu_j \bar{\omega}^2} \quad (3.98)$$

Ricavando λ_1 dalla seconda delle (3.97), la (3.98) diventa:

$$\chi_b(\bar{\omega}) = \frac{\cancel{\alpha} \frac{(\mu_j \bar{\omega}_b^2)^2}{\alpha^2} - (1 + \alpha) \frac{\mu_j \bar{\omega}_b^2}{\alpha} \mu_j \bar{\omega}^2}{\cancel{\alpha} \frac{(\mu_j \bar{\omega}_b^2)^2}{\cancel{\alpha}} - \mu_j \bar{\omega}^2} \quad (3.99)$$

Dividendo per $\mu_j \bar{\omega}^2$:

$$\chi_b(\bar{\omega}) = \frac{\frac{\mu_j \bar{\omega}_b^2}{\alpha} - \frac{(1 + \alpha)}{\alpha} \mu_j \bar{\omega}^2}{1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}_b^2}} \quad (3.100)$$

Mettendo in evidenza al numeratore $\left[(1+\alpha)(\mu_j \bar{\omega}_b^2) \right] / \alpha$, si ottiene in definitiva la rigidezza equivalente adimensionale del risonatore in configurazione B:

$$\chi_b(\bar{\omega}) = \frac{\frac{(1+\alpha)}{\alpha} \mu_j \bar{\omega}_b^2 \left[\frac{1}{(1+\alpha)} - \frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}_b^2} \right]}{1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}_b^2}} \quad (3.101)$$

3.7. METODI RISOLUTIVI

I metodi risolutivi utilizzati per lo studio della condotta poggiate su sistemi risonanti e attraversata da un determinato fluido sono due: nel caso in cui la distanza a tra i risonatori sia sufficientemente piccola da poterli considerare una distesa omogenea, il Metodo dell'Omogeneizzazione (HM) oppure, se l'assunzione sulla distanza tra i risonatori non può essere adottata, si utilizza il Metodo della Matrice di Trasferimento (TMM). Il Metodo della Matrice di Trasferimento è di certo quello, tra i due, maggiormente utilizzato in quanto è l'unico tra i due che si mantiene sempre valido a prescindere dalla formulazione del problema e dalle sue variabili: è pertanto il metodo più affidabile e sarà quello che, in questo studio, sarà maggiormente utilizzato per l'analisi della condotta su supporti risonanti. La teoria e l'applicazione del Metodo dell'Omogeneizzazione invece, con alcuni dei vantaggi che garantisce nei casi particolari di risonatori ravvicinati, saranno riportati successivamente al paragrafo 3.11.

3.7.1. METODO DELLA MATRICE DI TRASFERIMENTO (TMM)

Nei casi in cui la distanza a tra i risonatori non è così piccola da poterli considerare distribuiti con continuità lungo lo sviluppo della condotta, la dinamica del sistema viene studiata con il metodo TMM. Si considera la n -esima cella del tubo e si considera la funzione deflessione normalizzata $u_n(\xi)$ nell'intervallo $0 \leq \xi \leq 1$:

$$u_n(\xi, \tau) = e^{i\bar{\omega}\tau} \left[\Psi_n^{(1)} e^{-i\bar{q}_1 \xi} + \Psi_n^{(2)} e^{-i\bar{q}_2 \xi} + \Psi_n^{(3)} e^{-i\bar{q}_3 \xi} + \Psi_n^{(4)} e^{-i\bar{q}_4 \xi} \right] \quad (3.102)$$

Le condizioni al contorno in termini di spostamento, rotazione, taglio e momento tra la cella n e la cella $n+1$ sono:

$$\begin{aligned} u_n(1, \tau) &= u_{n+1}(0, \tau) \\ u_n'(1, \tau) &= u_{n+1}'(0, \tau) \\ u_n''(1, \tau) &= u_{n+1}''(0, \tau) \\ u_n'''(1, \tau) + \mu_f \eta^2 u_n'(1, \tau) &= u_{n+1}'''(0, \tau) + \mu_f \eta^2 u_{n+1}'(0, \tau) + \chi_j(\bar{\omega}) u_{n+1}(0, \tau) \end{aligned} \quad (3.103)$$

Si scrivono le derivate della (3.102) semplificando già per $e^{i\bar{\omega}\tau}$:

$$\begin{aligned} u_n'(\xi, \tau) &= -i\bar{q}_1 \Psi_n^{(1)} e^{-i\bar{q}_1 \xi} - i\bar{q}_2 \Psi_n^{(2)} e^{-i\bar{q}_2 \xi} - i\bar{q}_3 \Psi_n^{(3)} e^{-i\bar{q}_3 \xi} - i\bar{q}_4 \Psi_n^{(4)} e^{-i\bar{q}_4 \xi} \\ u_n''(\xi, \tau) &= -\bar{q}_1^2 \Psi_n^{(1)} e^{-i\bar{q}_1 \xi} - \bar{q}_2^2 \Psi_n^{(2)} e^{-i\bar{q}_2 \xi} - \bar{q}_3^2 \Psi_n^{(3)} e^{-i\bar{q}_3 \xi} - \bar{q}_4^2 \Psi_n^{(4)} e^{-i\bar{q}_4 \xi} \\ u_n'''(\xi, \tau) &= i\bar{q}_1^3 \Psi_n^{(1)} e^{-i\bar{q}_1 \xi} + i\bar{q}_2^3 \Psi_n^{(2)} e^{-i\bar{q}_2 \xi} + i\bar{q}_3^3 \Psi_n^{(3)} e^{-i\bar{q}_3 \xi} + i\bar{q}_4^3 \Psi_n^{(4)} e^{-i\bar{q}_4 \xi} \end{aligned} \quad (3.104)$$

Sostituendo le (3.104) nelle (3.103):

$$\begin{aligned}
1) \quad & \Psi_n^{(1)} e^{-i\bar{q}_1} + \Psi_n^{(2)} e^{-i\bar{q}_2} + \Psi_n^{(3)} e^{-i\bar{q}_3} + \Psi_n^{(4)} e^{-i\bar{q}_4} = \\
& = \Psi_{n+1}^{(1)} + \Psi_{n+1}^{(2)} + \Psi_{n+1}^{(3)} + \Psi_{n+1}^{(4)} \\
2) \quad & -i\bar{q}_1 \Psi_n^{(1)} e^{-i\bar{q}_1} - i\bar{q}_2 \Psi_n^{(2)} e^{-i\bar{q}_2} - i\bar{q}_3 \Psi_n^{(3)} e^{-i\bar{q}_3} - i\bar{q}_4 \Psi_n^{(4)} e^{-i\bar{q}_4} = \\
& = -i\bar{q}_1 \Psi_{n+1}^{(1)} - i\bar{q}_2 \Psi_{n+1}^{(2)} - i\bar{q}_3 \Psi_{n+1}^{(3)} - i\bar{q}_4 \Psi_{n+1}^{(4)} \\
3) \quad & -\bar{q}_1^2 \Psi_n^{(1)} e^{-i\bar{q}_1} - \bar{q}_2^2 \Psi_n^{(2)} e^{-i\bar{q}_2} - \bar{q}_3^2 \Psi_n^{(3)} e^{-i\bar{q}_3} - \bar{q}_4^2 \Psi_n^{(4)} e^{-i\bar{q}_4} = \\
& = -\bar{q}_1^2 \Psi_{n+1}^{(1)} - \bar{q}_2^2 \Psi_{n+1}^{(2)} - \bar{q}_3^2 \Psi_{n+1}^{(3)} - \bar{q}_4^2 \Psi_{n+1}^{(4)} \\
4) \quad & i\bar{q}_1^3 \Psi_n^{(1)} e^{-i\bar{q}_1} + i\bar{q}_2^3 \Psi_n^{(2)} e^{-i\bar{q}_2} + i\bar{q}_3^3 \Psi_n^{(3)} e^{-i\bar{q}_3} + i\bar{q}_4^3 \Psi_n^{(4)} e^{-i\bar{q}_4} + \\
& + \mu_f \eta^2 \left(-i\bar{q}_1 \Psi_n^{(1)} e^{-i\bar{q}_1} - i\bar{q}_2 \Psi_n^{(2)} e^{-i\bar{q}_2} - i\bar{q}_3 \Psi_n^{(3)} e^{-i\bar{q}_3} - i\bar{q}_4 \Psi_n^{(4)} e^{-i\bar{q}_4} \right) = \\
& = i\bar{q}_1^3 \Psi_{n+1}^{(1)} + i\bar{q}_2^3 \Psi_{n+1}^{(2)} + i\bar{q}_3^3 \Psi_{n+1}^{(3)} + i\bar{q}_4^3 \Psi_{n+1}^{(4)} + \\
& + \mu_f \eta^2 \left(-i\bar{q}_1 \Psi_{n+1}^{(1)} - i\bar{q}_2 \Psi_{n+1}^{(2)} - i\bar{q}_3 \Psi_{n+1}^{(3)} - i\bar{q}_4 \Psi_{n+1}^{(4)} \right) + \\
& + \chi_j(\bar{\omega}) \left(\Psi_{n+1}^{(1)} + \Psi_{n+1}^{(2)} + \Psi_{n+1}^{(3)} + \Psi_{n+1}^{(4)} \right) \tag{3.105}
\end{aligned}$$

Si possono introdurre le seguenti matrici:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e^{-i\bar{q}_1} & e^{-i\bar{q}_2} & e^{-i\bar{q}_3} & e^{-i\bar{q}_4} \\ -i\bar{q}_1 e^{-i\bar{q}_1} & -i\bar{q}_2 e^{-i\bar{q}_2} & -i\bar{q}_3 e^{-i\bar{q}_3} & -i\bar{q}_4 e^{-i\bar{q}_4} \\ -\bar{q}_1^2 e^{-i\bar{q}_1} & -\bar{q}_2^2 e^{-i\bar{q}_2} & -\bar{q}_3^2 e^{-i\bar{q}_3} & -\bar{q}_4^2 e^{-i\bar{q}_4} \\ (\bar{q}_1^3 - \mu_f \eta^2 \bar{q}_1) i e^{-i\bar{q}_1} & (\bar{q}_2^3 - \mu_f \eta^2 \bar{q}_2) i \bar{q}_2^3 e^{-i\bar{q}_2} & (\bar{q}_3^3 - \mu_f \eta^2 \bar{q}_3) i \bar{q}_3^3 e^{-i\bar{q}_3} & (\bar{q}_4^3 - \mu_f \eta^2 \bar{q}_4) i \bar{q}_4^3 e^{-i\bar{q}_4} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{H}}} \tag{3.106}$$

$$\underline{\Psi}_n = \begin{bmatrix} \Psi_n^{(1)} \\ \Psi_n^{(2)} \\ \Psi_n^{(3)} \\ \Psi_n^{(4)} \end{bmatrix} \quad \underline{\Psi}_{n+1} = \begin{bmatrix} \Psi_{n+1}^{(1)} \\ \Psi_{n+1}^{(2)} \\ \Psi_{n+1}^{(3)} \\ \Psi_{n+1}^{(4)} \end{bmatrix} \tag{3.107}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -i\bar{q}_1 & -i\bar{q}_2 & -i\bar{q}_3 & -i\bar{q}_4 \\ -\bar{q}_1^2 & -\bar{q}_2^2 & -\bar{q}_3^2 & -\bar{q}_4^2 \\ (\bar{q}_1^3 - \mu_f \eta^2 \bar{q}_1) i + \chi_j(\bar{\omega}) & (\bar{q}_2^3 - \mu_f \eta^2 \bar{q}_2) i + \chi_j(\bar{\omega}) & (\bar{q}_3^3 - \mu_f \eta^2 \bar{q}_3) i + \chi_j(\bar{\omega}) & (\bar{q}_4^3 - \mu_f \eta^2 \bar{q}_4) i + \chi_j(\bar{\omega}) \end{array} \right] \underline{\underline{\Psi}}_{n+1} \quad (3.108)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}(\omega)$$

In forma matriciale è possibile scrivere:

$$\underline{\underline{\mathbf{H}}} \underline{\underline{\Psi}}_n = \underline{\underline{\mathbf{K}}}(\omega) \underline{\underline{\Psi}}_{n+1} \quad (3.109)$$

In accordo con il teorema di Block [36]:

$$\underline{\underline{\Psi}}_{n+1} = \underline{\underline{\Psi}}_n e^{-i\bar{q}} \quad (3.110)$$

Sostituendo la (3.110) con la (3.109):

$$\underline{\underline{\mathbf{H}}} \underline{\underline{\Psi}}_n = \underline{\underline{\mathbf{K}}}(\omega) \underline{\underline{\Psi}}_n e^{-i\bar{q}} \quad (3.111)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}(\omega)^{-1} \underline{\underline{\mathbf{H}}} \underline{\underline{\Psi}}_n = \underline{\underline{\Psi}}_n e^{-i\bar{q}} \quad (3.112)$$

$$\left[\underline{\underline{\mathbf{K}}}(\omega)^{-1} \underline{\underline{\mathbf{H}}} - e^{-i\bar{q}} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right] \underline{\underline{\Psi}}_n = 0 \quad (3.113)$$

In cui $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ è la matrice di Identità di dimensioni 4×4 ; si introduce la Matrice di Trasferimento $\underline{\underline{\mathbf{T}}}(\omega) = \underline{\underline{\mathbf{K}}}(\omega)^{-1} \underline{\underline{\mathbf{H}}}$ e si scrive il problema agli autovalori nella seguente forma:

$$\left[\underline{\underline{\mathbf{T}}}(\omega) - e^{-i\bar{q}} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right] \underline{\underline{\Psi}}_n = 0 \quad (3.114)$$

Le soluzioni non banali del problema agli autovalori si ottengono per:

$$\det \left[\underline{\underline{\mathbf{T}}}(\omega) - e^{-i\bar{q}} \underline{\underline{\mathbf{I}}} \right] \underline{\underline{\Psi}}_n = 0 \quad (3.115)$$

La soluzione fornisce i valori di \bar{q} per ogni valore di frequenza normalizzata $\bar{\omega}$. Se i valori di \bar{q} sono reali, le onde possono propagarsi lungo la condotta e l'intervallo in cui questo fenomeno è possibile è noto come *pass band*; al contrario l'esistenza di parti immaginarie di \bar{q} indica frequenze in cui si ha l'attenuazione delle onde.

3.8. VIBRAZIONI FORZATE IN UNA CONDOTTA FINITA

Si assume che la condotta poggiate su supporti risonanti sia soggetta all'azione di un carico armonico che, nella n-esima cella è pari a:

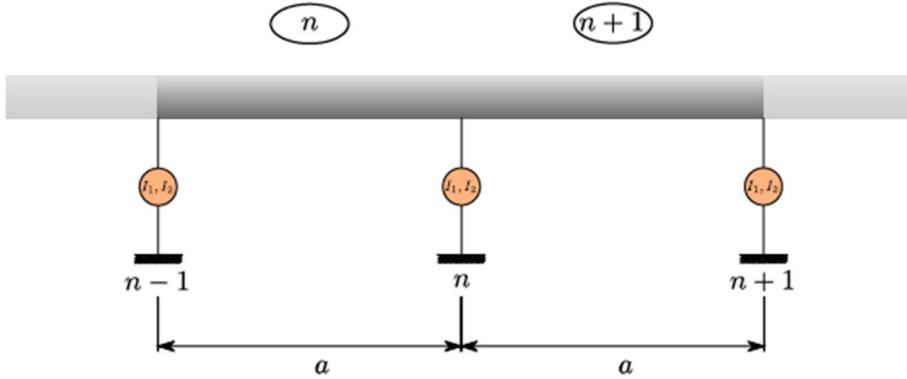
$$\phi_n(\xi, \tau) = \phi_{nz}(x) e^{i\bar{\omega}\tau} \quad (3.116)$$

In cui $\phi_{nz}(x)$ è una funzione arbitraria che dipende dallo spazio. Per calcolare la risposta in frequenza della condotta, è possibile utilizzare il metodo della matrice di rigidità dinamica; con tale metodo è possibile ottenere in forma analitica chiusa l'esatta matrice di rigidità dinamica per la cella e il vettore del carico armonico agente sulla stessa. Successivamente, con un classico metodo agli elementi finiti, è possibile costruire la matrice di rigidità dinamica globale e il vettore globale del carico delle celle, con una procedura di assemblaggio. Si considera l'equazione della condotta soggetta ad un carico armonico alla generica ascissa ξ .

$$\frac{\partial^4 u_n}{\partial \xi^4} + \mu_f \eta^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial \xi^2} + 2\mu_f \eta \frac{\partial^2 u_n}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial \tau^2} = \phi_n(\xi, \tau) \quad (3.117)$$

Si considera che la generica cella n sia interessata da diversi set di condizioni al contorno nei nodi :

$$\begin{aligned} u_n(0) = 1 & \quad u_n(1) = u'_n(0) = u'_n(1) = 0 \\ u_n(1) = 1 & \quad u_n(0) = u'_n(0) = u'_n(1) = 0 \\ u'_n(0) = 1 & \quad u_n(0) = u_n(1) = u'_n(1) = 0 \\ u'_n(1) = 1 & \quad u_n(0) = u_n(1) = u'_n(0) = 0 \end{aligned} \quad (3.118)$$



La risposta in frequenza per ogni set di condizioni al contorno rappresenta la funzione di forma corrispondente. Note le funzioni di forma N_i , lo spostamento la risposta in frequenza per lo spostamento della cella n ad una determinata ascissa ξ è dato da:

$$u_n(\xi) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \bar{\omega}) u_n^i \quad (3.119)$$

In cui u_n^i è l' i -esimo spostamento nodale.

Con un classico metodo agli elementi finiti, è possibile ricavare il vettore delle forze nodali \mathbf{f}_n e il vettore degli spostamenti nodali \mathbf{u}_n . Si considera innanzitutto l'equazione della condotta nel dominio della frequenza senza che vi sia applicato un carico esterno:

$$\frac{\partial^4 u_n}{\partial \xi^4} + \mu_f \eta^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial \xi^2} + 2\mu_f \eta i \bar{\omega} \frac{\partial u_n}{\partial \xi} - \bar{\omega}^2 u_n = 0 \quad (3.120)$$

si moltiplica ciascun termine per uno spostamento virtuale δu_n e si integra lungo la lunghezza unitaria della cella:

$$\int_0^1 u_n^{IV} \delta u_n d\xi + \mu_f \eta^2 \int_0^1 u_n^{II} \delta u_n d\xi + 2\mu_f \eta i \bar{\omega} \int_0^1 u_n^I \delta u_n d\xi - \bar{\omega}^2 \int_0^1 u_n \delta u_n d\xi = 0 \quad (3.121)$$

Ricorrendo all'integrazione per parti due volte sul primo termine e una volta sul secondo termine si può scrivere:

$$\begin{aligned}
& [u_n^{III} \delta u_n]_0^1 - [u_n^{II} \delta u_n^I]_0^1 + \int_0^1 u_n^{II} \delta u_n^{II} d\xi + \mu_f \eta^2 [u_n^{II} \delta u_n]_0^1 - \mu_f \eta^2 \int_0^1 u_n^I \delta u_n^I d\xi + \\
& + 2\mu_f \eta i \bar{\omega} \int_0^1 u_n^I \delta u_n d\xi - \bar{\omega}^2 \int_0^1 u_n \delta u_n d\xi = 0
\end{aligned} \tag{3.122}$$

Ovvero:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 u_n^{II} \delta u_n^{II} d\xi - \mu_f \eta^2 \int_0^1 u_n^I \delta u_n^I d\xi + 2\mu_f \eta i \bar{\omega} \int_0^1 u_n^I \delta u_n d\xi - \bar{\omega}^2 \int_0^1 u_n \delta u_n d\xi = \\
& = -[u_n^{III} + \mu_f \eta^2 u_n^{II}]_0^1 \delta u_n + [u_n^{II} \delta u_n^I]_0^1 = \\
& = f_1 \delta u_n(0) + f_2 \delta u_n^I(0) + f_3 \delta u_n(1) + f_4 \delta u_n^I(1)
\end{aligned} \tag{3.123}$$

Sostituendo la soluzione esatta (3.119) sia nella risposta in frequenza che nello spostamento virtuale si ottiene:

$$\left[\mathbf{K}(\bar{\omega}) + i\bar{\omega}\mathbf{C}(\bar{\omega}) + \bar{\omega}^2\mathbf{M}(\bar{\omega}) \right] \mathbf{u}_n = \mathbf{f}_n \tag{3.124}$$

Avendo posto che l'elemento ij all'interno delle matrici delle masse, delle rigidezze e di dissipazione siano pari a:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{K})_{ij} &= \int_0^1 (N_i^{II} N_j^{II} - \mu_f \eta^2 N_i^I N_j^I) d\xi \\
(\mathbf{C})_{ij} &= 2\mu_f \eta \int_0^1 N_i N_j^I d\xi \\
(\mathbf{M})_{ij} &= \int_0^1 N_i N_j d\xi
\end{aligned} \tag{3.125}$$

I vettori degli spostamenti nodali e delle forze nodali sono:

$$\mathbf{u}_n = [u_n^1 \quad u_n^2 \quad u_n^3 \quad u_n^4]^T \quad \mathbf{f}_n = [f_n^1 \quad f_n^2 \quad f_n^3 \quad f_n^4] \tag{3.126}$$

La (3.124) si può scrivere come:

$$\mathbf{D}(\bar{\omega}) \mathbf{u}_n = \mathbf{f}_n \tag{3.127}$$

In cui $\mathbf{D}(\bar{\omega})$ è la matrice di rigidezza esatta del sistema.

Al fine di ricavare il vettore dei carichi esatto per la cella, si considera l' n -esima cella soggetta ad un carico unitario armonico $1e^{i\bar{\omega}\tau}$ all'ascissa $\xi_{n,0}$.

L'equazione di governo in frequenza della cella si può scrivere come:

$$u_n^{IV} + \mu_f \eta^2 u_n^{II} + 2\mu_f \eta i \bar{\omega} u_n^I - \bar{\omega}^2 u_n = \delta(\xi - \xi_{n,0}) \quad (3.128)$$

Applicando la trasformata di Laplace ad entrambi i membri dell'equazione, e ricordando le quantità all'interno della (3.102) si ottiene:

$$u_n(\xi, \tau) = e^{i\bar{\omega}\tau} \left[\Psi_n^{(1)} e^{-i\bar{q}_1 \xi} + \Psi_n^{(2)} e^{-i\bar{q}_2 \xi} + \Psi_n^{(3)} e^{-i\bar{q}_3 \xi} + \Psi_n^{(4)} e^{-i\bar{q}_4 \xi} \right] + G(\xi, \xi_{n,0}) \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (3.129)$$

In cui $G(\xi, \xi_{n,0})$ è la soluzione fondamentale:

$$G(\xi, \xi_{n,0}) = \frac{(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5) H(\xi - \xi_{n,0})}{S_{12} S_{13} S_{23} S_{14} S_{24} S_{34}} \quad (3.130)$$

In cui:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= S_1^2 (S_2 \varepsilon_{34} + S_3 \varepsilon_{42} + S_4 \varepsilon_{23}) & \Gamma_2 &= S_1 (S_2^2 \varepsilon_{43} + S_3^2 \varepsilon_{24} - S_4^2 \varepsilon_{23}) \\ \Gamma_3 &= S_3 S_{34} S_4 \varepsilon_{12} & \Gamma_4 &= S_2^2 (S_3 \varepsilon_{14} - S_4 \varepsilon_{13}) & \Gamma_5 &= S_2 (S_3^2 \varepsilon_{41} - S_4^2 \varepsilon_{13}) \\ \varepsilon_{ij} &= e^{S_i(\xi - \xi_{n,0})} - e^{S_j(\xi - \xi_{n,0})} & S_{ij} &= S_i - S_j \end{aligned} \quad (3.131)$$

$$S_1 = \frac{C_1 - \sqrt{-B_1 + C_2 - D_1 - 4\eta^2 \mu_f}}{2\sqrt{3}} \quad S_2 = \frac{C_1 + \sqrt{-B_1 + C_2 - D_1 - 4\eta^2 \mu_f}}{2\sqrt{3}}$$

$$S_3 = -\frac{C_1 + \sqrt{-B_1 + C_2 + D_1 - 4\eta^2 \mu_f}}{2\sqrt{3}} \quad S_4 = \frac{-C_1 + \sqrt{-B_1 + C_2 + D_1 - 4\eta^2 \mu_f}}{2\sqrt{3}}$$

Con:

$$\begin{aligned}
B_1 &= \sqrt[3]{A_1 + 6\sqrt{A_2} + \eta^6 \mu_f^3} & C_1 &= \sqrt{\frac{(B_1 - \eta^2 \mu_f)^2 - 12 \bar{\omega}^2}{B_1}} \\
C_2 &= \frac{12 \bar{\omega}^2 - \eta^4 \mu_f^2}{B_1} & D_1 &= \frac{12 i \sqrt{3} \eta \bar{\omega} \mu_f}{C_1} \\
A_1 &= 18 \eta^2 \bar{\omega}^2 \mu_f (2 - 3 \mu_f) \\
A_2 &= -3 \eta^8 \bar{\omega}^2 (\mu_f - 1) \mu_f^4 + 3 \eta^4 \bar{\omega}^4 \mu_f^2 (27 \mu_f^2 - 36 \mu_f + 8) + 48 \bar{\omega}^6
\end{aligned} \tag{3.132}$$

Utilizzando la (3.129) per ricavare gli spostamenti nodali, si arriva alla formulazione:

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{A}\mathbf{c} + \mathbf{L} \quad \mathbf{f}_n = \mathbf{B}\mathbf{c} + \mathbf{S} \tag{3.133}$$

Si ottiene che il vettore delle forze esterne si calcola come:

$$\mathbf{f}_n = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}_n + \mathbf{S} - \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{L} = \mathbf{D}\mathbf{u}_n + \mathbf{f}_{0,n} \tag{3.134}$$

In cui $\mathbf{f}_{0,n}$ è il vettore delle forze corrispondente all'applicazione del carico armonico unitario $1e^{i\bar{\omega}\tau}$ all'ascissa $\xi = \xi_{n,0}$.

La trasmittanza, che dà una misura del comportamento del sistema paragonabile al calcolo delle curve di dispersione, si ricava dal rapporto tra la deflessione del tubo ad una determinata ascissa $\xi = L/L = 1$ e la deflessione in corrispondenza del punto di applicazione del carico.

3.9. PROVE NUMERICHE CONDOTTA INFINITA

3.9.1. GENERALITÀ

Le prove numeriche sono state condotte per il sistema con risonatori sia in configurazione A che B, al variare di alcuni dei parametri che intervengono nel problema. I primi risultati soddisfacenti, in ambito dimensionale, sono stati trovati per condotte aventi sezione scatolare cava in acciaio (di densità ρ_p), in cui il fluido (di densità ρ_f) transitante all'interno è acqua, circolante alla velocità di

50 m/s . I risonatori sono posti alla distanza di 2 m e l'inertanza scelta è pari a 1500 kg . La pulsazione è di 80 Hz , cui corrisponde una frequenza di 502 rad / s . I parametri iniziali del sistema dimensionale per la condotta sono pertanto:

$$\begin{aligned}
 & sez \ 300 \times 500 \times 2 \text{ mm} \\
 & \rho_f = 1000 \text{ Kg / mc} \\
 & \rho_p = 7860 \text{ Kg / mc} \\
 & v = 50 \text{ m / s}
 \end{aligned} \tag{3.135}$$

Mentre i parametri dei risonatori disposti periodicamente sono:

$$\begin{aligned}
 & a = 2 \text{ m} \\
 & J = 1500 \text{ Kg} \\
 & \omega_a = \omega_b = 502 \text{ rad / sec} \\
 & v = 80 \text{ Hz} \\
 & \alpha = 0.5
 \end{aligned} \tag{3.136}$$

I parametri adimensionali associati al sistema considerato sono:

$$\begin{aligned}
 & \alpha = 0.5 \\
 & \mu_J = 7 \\
 & \mu_f = 0.4 \\
 & \eta = 0.07 \\
 & \bar{\omega}_a = 1.5 \\
 & \alpha = 0.5
 \end{aligned} \tag{3.137}$$

Sono state condotte indagini parametriche; tuttavia, per una visione preliminare della variazione dell'andamento delle onde elastiche, nello specifico si riportano in forma grafica i risultati ottenuti per due set di accoppiamento:

$$\begin{aligned}
 \bar{\omega}_{a,b} = 0.5 \quad \mu_J = 5 \quad \alpha = 0.5 \quad \eta = 0.1 \\
 \bar{\omega}_{a,b} = 1.5 \quad \mu_J = 2 \quad \alpha = 0.5 \quad \eta = 0.1
 \end{aligned} \tag{3.138}$$

Si riporta al paragrafo 3.9.3 l'andamento delle curve di dispersione ottenute applicando il metodo della matrice di trasferimento e ottenendo quattro vettori d'onda \bar{q} . I vettori d'onda possono essere reali, complessi o puramente immaginari;

nel caso in cui siano reali si ha la propagazione delle onde, mentre la parte immaginaria implica l'attenuazione. Si utilizza il metodo riportato da Hajarolasvadi e Elbanna nel 2019 per distinguere i range di frequenza come:

- *Propagation-attenuation* (PA), in cui i vettori d'onda sono reali e complessi, i quali hanno la forma $\bar{q} = \text{Re}(\bar{q})$ con $0 < |\text{Re}(\bar{q})| < \pi$ oppure $|\text{Im}(\bar{q})| > 0$ con $\text{Re}(\bar{q}) = 0$ oppure $|\text{Re}(\bar{q})| = \pi$.
- *Attenuation-Attenuation* (AA), in cui tutti i vettori d'onda sono complessi, con $\text{Re}(\bar{q}) = 0$ oppure $|\text{Re}(\bar{q})| = \pi$ e parte immaginaria diversa da zero.
- *Complex* (C) dove i vettori d'onda sono tutti complessi con forma $\bar{q} = \text{Re}(\bar{q}) + i \text{Im}(\bar{q})$, in cui $0 < |\text{Re}(\bar{q})| < \pi$ e $|\text{Im}(\bar{q})| > 0$

3.9.2. CONVENIENZA DEI SUPPORTI RISONANTI RISPETTO AI SUPPORTI ELASTICI

Il primo controllo da svolgere è quello che riguarda la verifica della convenienza della metodologia adottata ovvero dell'inserimento dei risonatori con inerter. È possibile effettuare tale verifica confrontando i risultati del caso in cui la condotta poggia su supporti elastici con i risultati del caso oggetto di studio, considerando però che i due sistemi abbiano le stesse rigidezze e che pertanto l'unica differenza tra i due stia nel valore dell'inertanza, che è pari a $J = 0$ nel primo caso ed a $J \neq 0$ nel secondo.

Per ognuna delle nove prove, lo step iniziale consiste nell'individuare i valori delle rigidezze, che possono essere legati ai parametri μ_j e $\bar{\omega}_a$ nel seguente modo. Per il sistema A è noto dalla (3.87) che:

$$\bar{\omega}_a = \sqrt{\frac{(1+\alpha)\lambda_1}{\mu_j}} \quad (3.139)$$

Pertanto:

$$\bar{\omega}_a^2 \mu_j = (1 + \alpha) \lambda_1 \quad (3.140)$$

Da cui si ottiene:

$$\lambda_1 = \frac{\bar{\omega}_a^2 \mu_j}{(1 + \alpha)} \quad (3.141)$$

A questo punto dalla (3.141) e ricordando che $\lambda_2 = \alpha \lambda_1$, per ogni prova si ricavano i valori delle rigidezze adimensionali corrispondenti, utilizzando soltanto i parametri adimensionali in esame. Le rigidezze rimangono le medesime, sia caso di supporti elastici che di supporti risonanti con inerter. Bisogna considerare inoltre l'espressione della rigidezza adimensionale $\chi_a(\bar{\omega})$ nel caso di supporti elastici con inertanza nulla, la quale diventa dalla (3.84):

$$\chi_{a,0}(\bar{\omega}) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)} \quad (3.142)$$

Per il sistema B la procedura è analoga; dalla (3.97):

$$\lambda_2 = \bar{\omega}_b^2 \mu_j \quad (3.143)$$

E inoltre $\lambda_1 = \lambda_2 / \alpha$. Note le rigidezze, dalla (3.96) si ricava il valore della rigidezza equivalente del sistema B nel caso in cui $J = 0$:

$$\chi_b(\bar{\omega}) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2} \quad (3.144)$$

Il confronto tra i due sistemi viene condotto in termini di curva di dispersione, paragonando l'ampiezza dello *zero-frequency gap* iniziale che si ha nel caso di condotta su supporti elastici, dovuto alla risonanza naturale del sistema, con il *band gap* totale, dato dalla somma dello *zero-frequency gap* con il *band gap* da risonanza del sistema con inerter. In particolare, il *band gap* è formato da una piccola banda AA e dalla banda C e si apre circa alla frequenza cui si sintonizzano i risonatori (dipende dall'ampiezza della banda AA) e rimane aperto per coprire un certo intervallo, che può essere opportunamente modulato

intervenendo sui parametri adimensionali coinvolti. Si riporta a titolo esemplificativo un esempio di confronto tra le curve di dispersione nei due casi (**Fig. 3.8**):

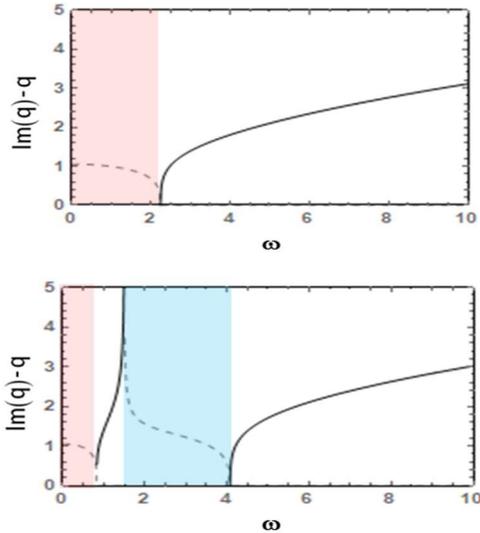


Fig. 3.8: confronto tra le curve di dispersione della risposta nel caso di sistema con supporti elastici (a) e sistema con supporti risonanti con inerter (b), in cui si individuano l'ampiezza dello *zero-frequency gap* (rosa) e del *band gap* (blu)

Lo *zero-frequency gap* è più ampio nel caso di condotta poggiate su supporti elastici e si riduce se si utilizzano i risonatori con inerter; tuttavia, con $J \neq 0$ si ottiene l'apertura del *band gap* circa alla frequenza desiderata, il che rappresenta il primo vantaggio dell'utilizzo dei dispositivi proposti. Un ulteriore beneficio è dovuto al fatto che il *band gap* coinvolge un intervallo $\Delta\bar{\omega}$ di frequenze, sul quale è possibile intervenire in modo tale da ottenere l'attenuazione delle vibrazioni desiderata a seconda delle peculiari esigenze del problema indagato. Inoltre, la convenienza dell'utilizzare dispositivi risonanti con inerter sta nel fatto che le caratteristiche di attenuazione delle vibrazioni, rappresentate dall'andamento della parte immaginaria, tratteggiata nella **Fig. 3.8**, sono migliori nel *band gap* da risonanza locale piuttosto che nella risposta elastica. Ciò si evince dal fatto che l'andamento della parte immaginaria si mantiene al di sotto del valore unitario nel caso di supporti elastici, mentre assume valori superiori ad 1

utilizzando i dispositivi proposti e tale andamento indica che le caratteristiche di dissipazione delle vibrazioni nel secondo caso sono migliori.

3.9.3. RISULTATI SISTEMI A E B: CURVE DI DISPERSIONE

Si riportano i risultati delle analisi condotte per diversi valori di frequenza adimensionale $\bar{\omega}_{a,b} = (0.5, 1.5)$ e del parametro legato all'inertanza $\mu_j = (2, 5)$.

Si può vedere dai grafici che in tutti i casi si ha la presenza dello *zero frequency gap* e successivamente, nell'intorno della frequenza di tuning, l'apertura del *band gap* da risonanza locale; nelle **Fig. 3.10** e **Fig. 3.12** si nota come l'apertura del *band gap* avvenga in corrispondenza di una frequenza leggermente inferiore rispetto alla $\bar{\omega}_{a,b}$ per la frequenza della banda (AA) con $\bar{\omega}_{a,b} = 1.5$ e $\mu_j = 2$, sia per il sistema A che per il sistema B, mentre la corrispondenza tra $\bar{\omega}_{a,b}$ e $\bar{\omega}_t$ sia più precisa nel primo set di valori indagato.

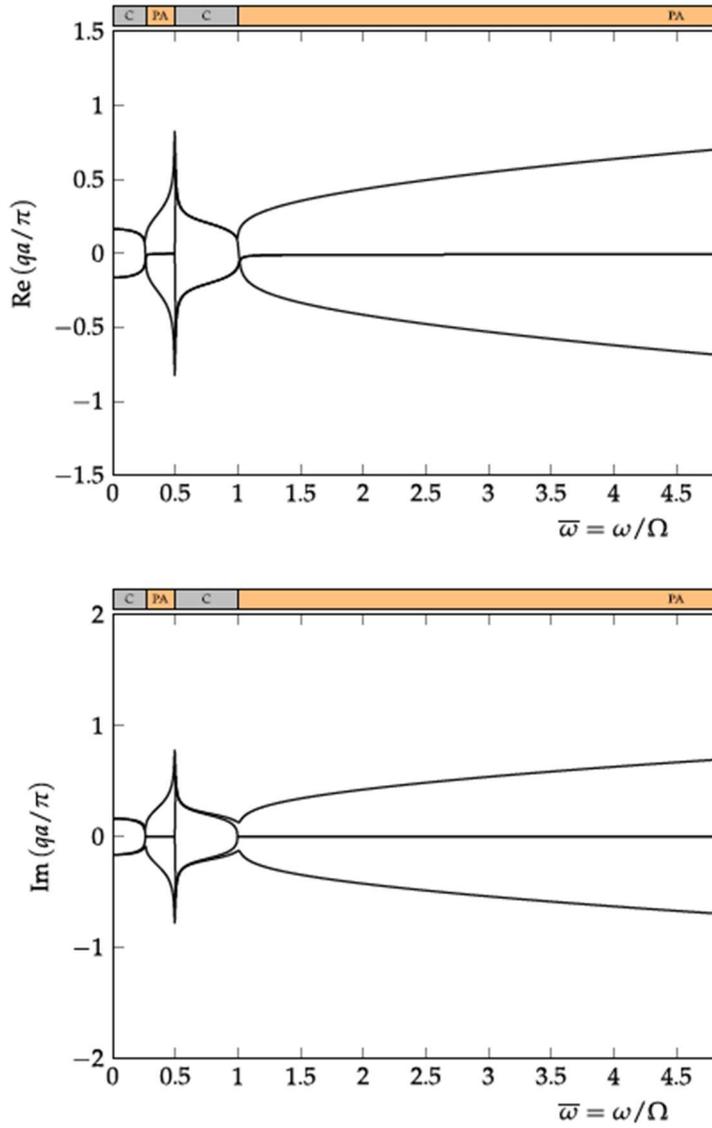


Fig. 3.9: SISTEMA A, curve di dispersione per $\bar{\omega}_a = 0.5$, $\mu_j = 5$, $\alpha = 0.5$, $\eta = 0.1$

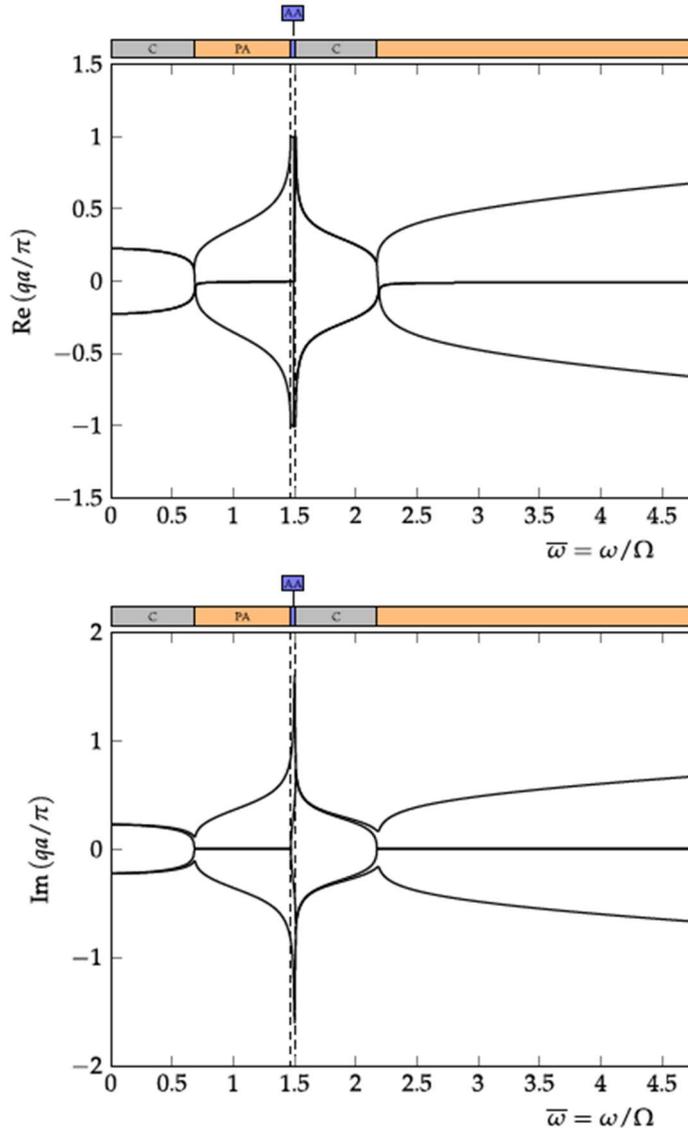


Fig. 3.10: SISTEMA A, curve di dispersione per $\bar{\omega}_a = 1.5$, $\mu_J = 2$, $\alpha = 0.5$, $\eta = 0.1$

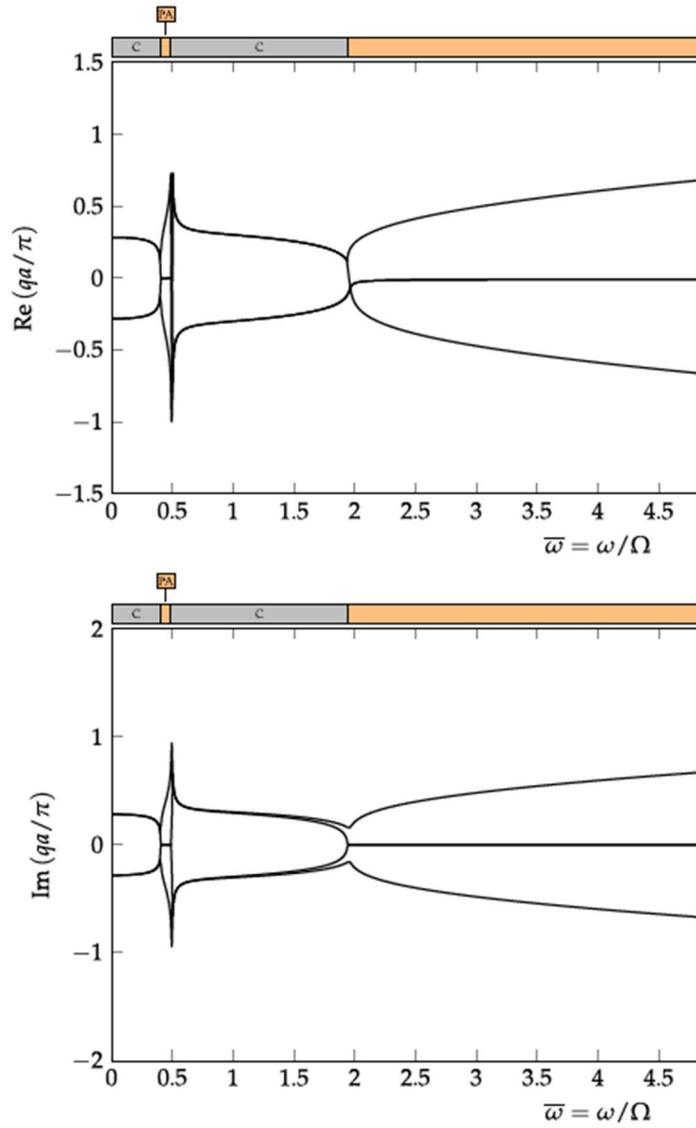


Fig. 3.11: SISTEMA B, curve di dispersione per $\bar{\omega}_b = 0.5$, $\mu_j = 5$, $\alpha = 0.5$, $\eta = 0.1$

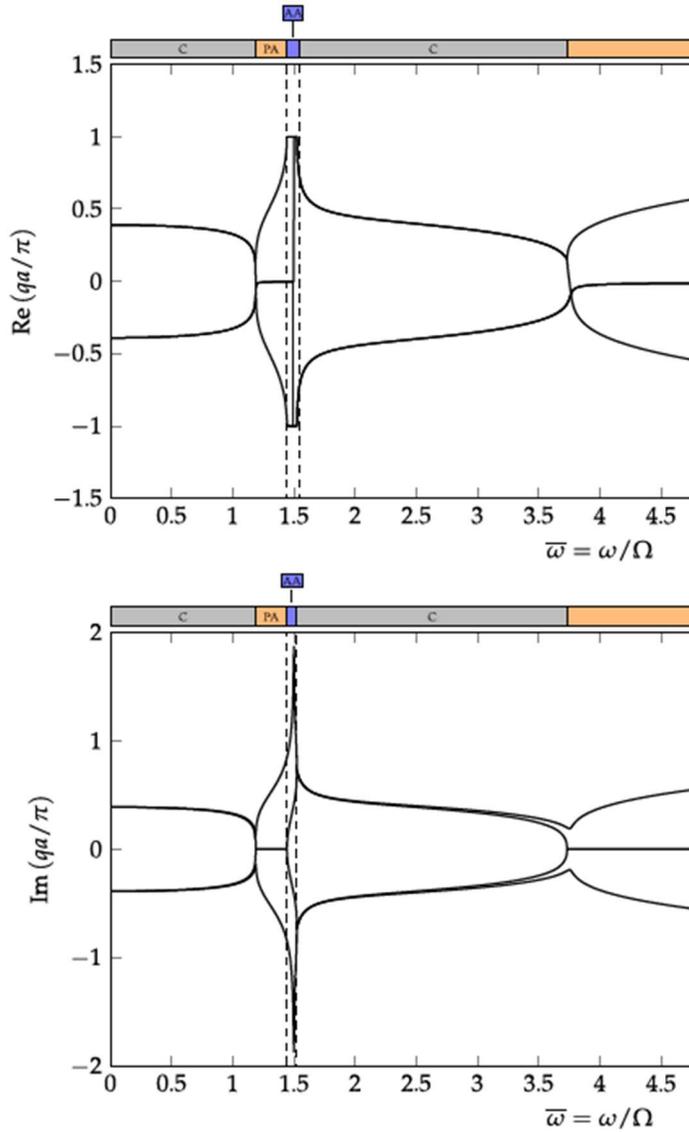


Fig. 3.12: SISTEMA B, curve di dispersione per $\bar{\omega}_b = 1.5$, $\mu_j = 2$, $\alpha = 0.5$, $\eta = 0.1$

Dall'osservazione delle figure precedenti è possibile trarre alcune conclusioni; innanzitutto, l'ampiezza dello *zero frequency gap* e del *band gap* aumenta nel secondo set di parametri, andando pertanto a coprire con la banda PA in cui si ha l'attenuazione un numero di frequenze superiore. Secondariamente, si noti come anche il valore delle curve di dispersione sull'asse delle ordinate sia superiore

3.9.4. RISULTATI SISTEMI A E B: CONFRONTI

Al fine di visualizzare in maniera più immediata le differenze del comportamento dei due sistemi indagati ed anche cosa cambia nel comportamento delle curve di dispersione quando il valore dei parametri varia, si riportano i grafici ruotando le curve di 90° . Si considerano per la frequenza di sintonizzazione dei risonatori i valori $\bar{\omega}_{a,b} = (0.5, 1.0, 1.5)$ e per il parametro legato all'inertanza $\mu_J = (2, 5, 10)$.

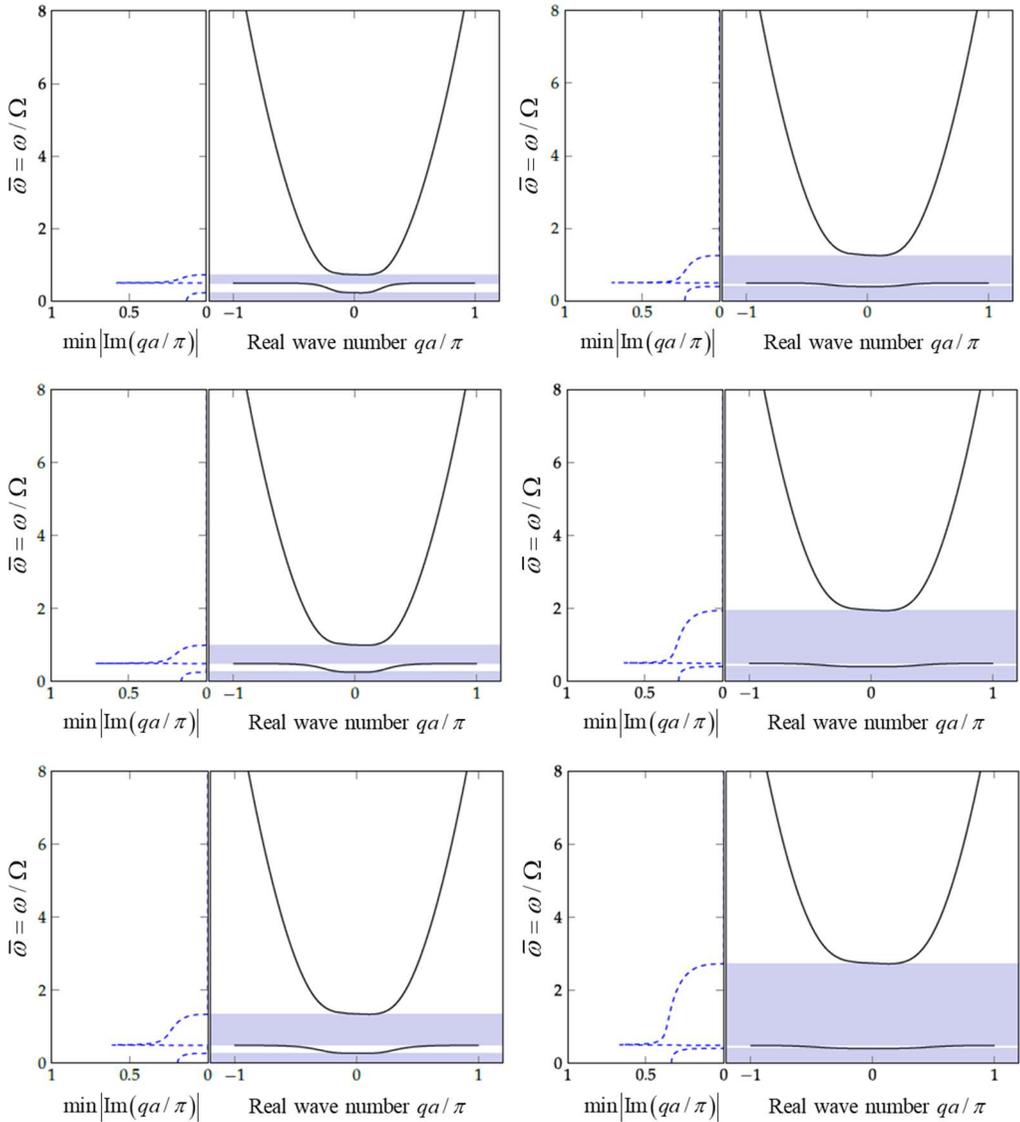


Fig. 3.13: curve di dispersione sistema A (a sinistra) e sistema B (a destra) per $\bar{\omega}_{a,b} = 0.5$, $\alpha = 0.5$, $\eta = 0.1$ per diversi valori, dall'alto verso il basso, di $\mu_J = (2, 5, 10)$

Si precisa che per una visione più chiara dei risultati, sono stati riportati nei grafici solamente il numero d'onda reale al di fuori del *band gap* ed i valori assoluti minori delle parti immaginarie dei numeri d'onda complessi all'interno dei *band gaps*; questi ultimi rappresentano l'attenuazione più bassa per ciascuna frequenza e pertanto sono importanti ai fini progettuali.

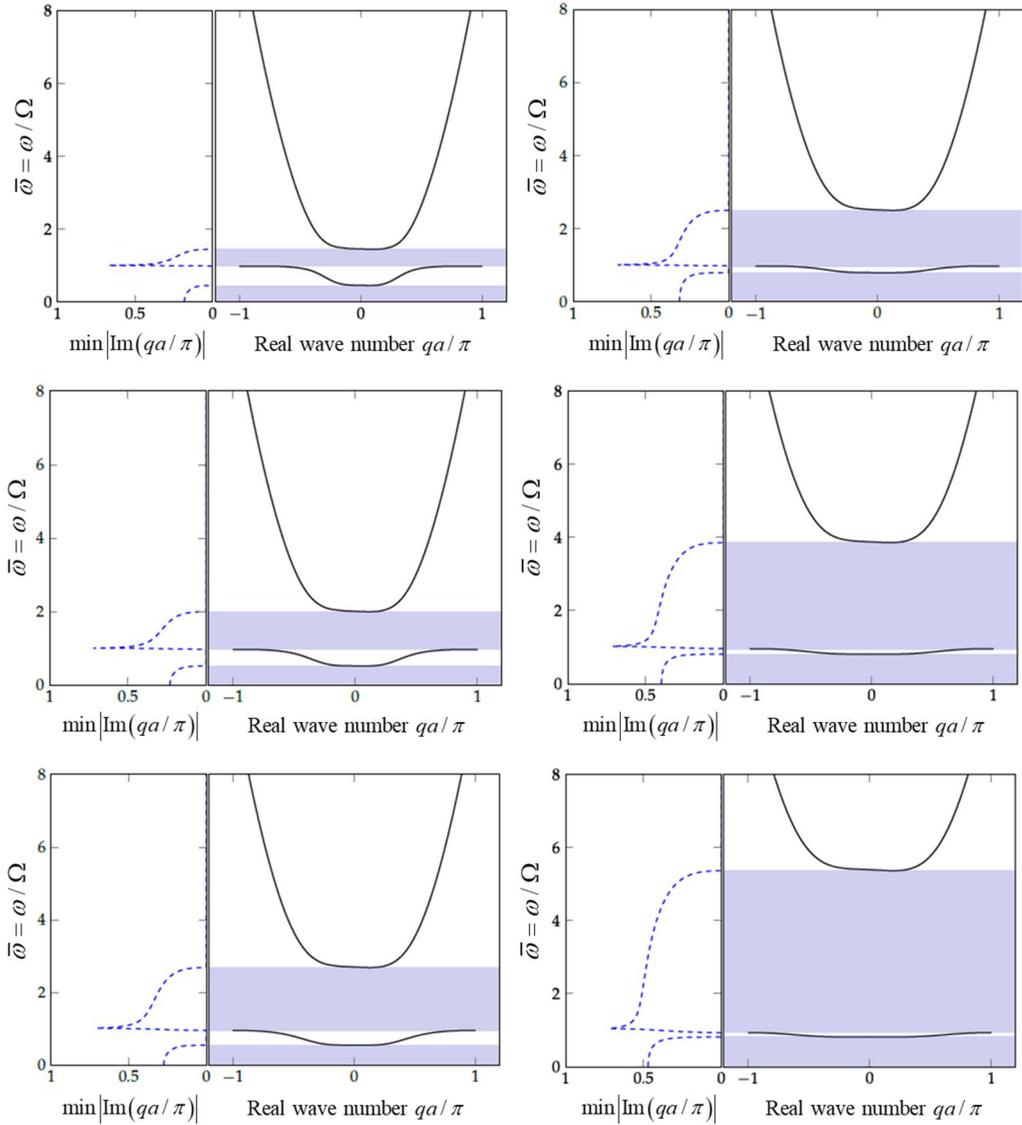


Fig. 3.14: curve di dispersione sistema A (a sinistra) e sistema B (a destra) per $\bar{\omega}_{a,b} = 1.0$, $\alpha = 0.5$, $\eta = 0.1$ per diversi valori, dall'alto verso il basso, di $\mu_j = (2, 5, 10)$

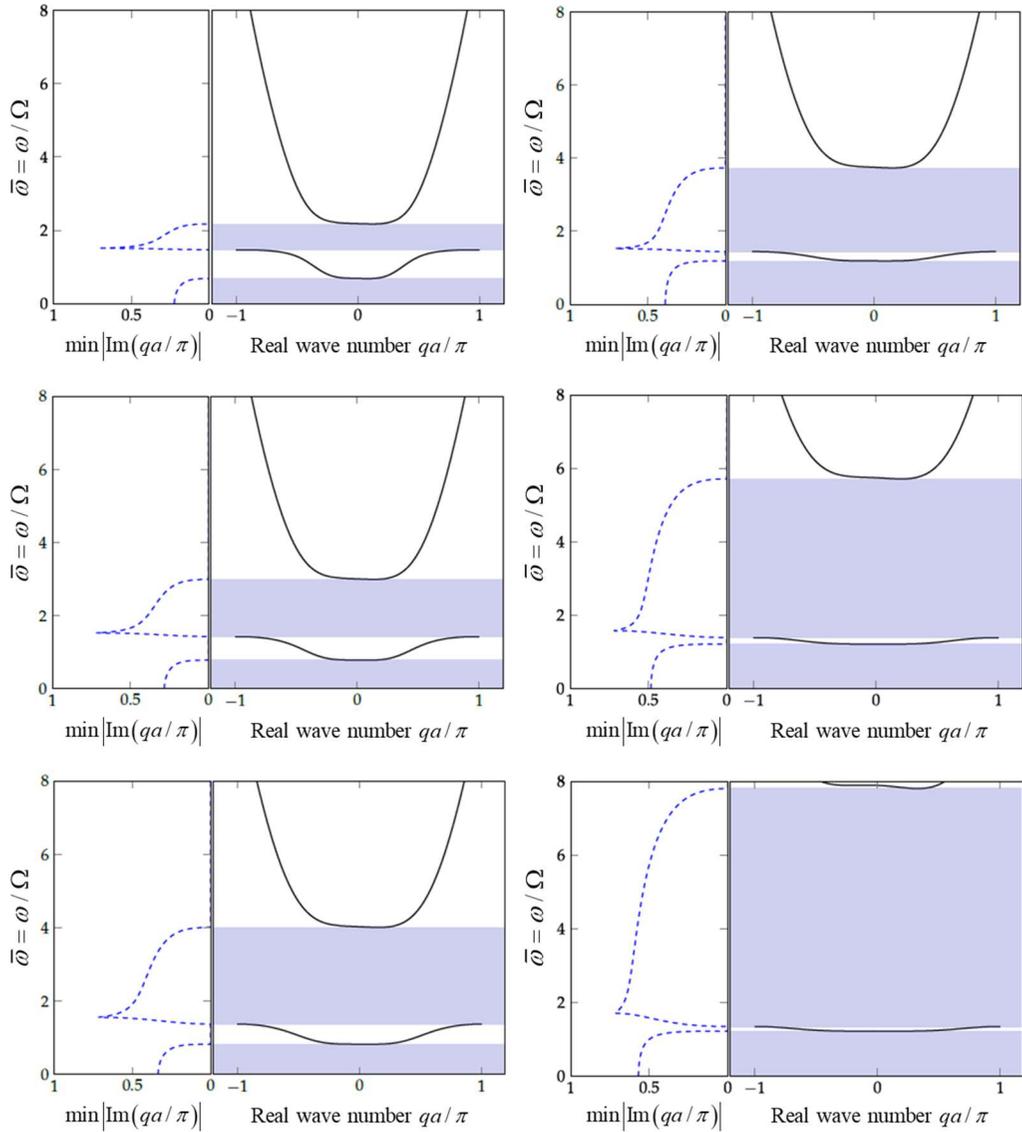


Fig. 3.15: curve di dispersione sistema A (a sinistra) e sistema B (a destra) per $\bar{\omega}_{a,b} = 1.5$, $\alpha = 0.5$, $\eta = 0.1$ per diversi valori, dall'alto verso il basso, di $\mu_j = (2, 5, 10)$

Dai grafici riportati nelle **Fig. 3.13**, **Fig. 3.14**, **Fig. 3.15** è possibile vedere come la frequenza di chiusura del *band gap* e la sua ampiezza aumentino con l'inertanza per fissata frequenza di sintonizzazione, ed aumentino con la frequenza di sintonizzazione per inertanza fissa. Si può notare come, in ogni caso, il sistema

B produca risultati migliori in termini di ampiezza dell'intervallo, a parità di $\bar{\omega}$ e μ_J , ma il valore del picco del *band gap* si mantiene simile.

Lo *zero frequency gap* parte, naturalmente, sempre dalla frequenza nulla e la sua ampiezza non varia con l'inertanza se la frequenza di sintonizzazione rimane fissa ma varia se, mantenendo costante il valore dell'inertanza, si varia la frequenza di tuning. Inoltre, si nota che, come ci si aspettava, l'attenuazione all'interno del *band gap* è generalmente migliore dell'attenuazione all'interno dello *zero frequency gap*.

Nelle **Fig. 3.16**, **Fig. 3.17**, **Fig. 3.18** si riportano i risultati ottenuti effettuando le medesime prove in termini di frequenza di sintonizzazione $\bar{\omega}_t = \bar{\omega}_{a,b} = (0.5, 1.0, 1.5)$ e per il parametro legato all'inertanza $\mu_J = (2, 5, 10)$, sempre con valore di velocità adimensionale $\eta = 0.1$ ma scegliendo come rapporto tra le rigidità delle due molle del risonatore il rapporto $\alpha = 1.0$ piuttosto che $\alpha = 0.5$. Dalle prove effettuate per un diverso valore di α risulta, innanzitutto, che anche in questo caso le ampiezze del *band gap* aumentano al crescere della frequenza di risonanza e del parametro legato all'inertanza e la configurazione B si riconferma la migliore. Però per ciò che concerne lo *zero frequency gap* va fatta una distinzione tra i due sistemi: nel sistema A, si hanno valori maggiori del *gap* iniziale per $\alpha = 1.0$ mentre per il sistema B per $\alpha = 0.5$.

Si riporta inoltre in **Fig. 3.19** una delle prove effettuate per valutare l'influenza della velocità nella risposta delle condotte localmente risonanti, nello specifico per $\bar{\omega}_{a,b} = 1.0$, $\alpha = 0.5$, $\mu_J = 5$. L'influenza della velocità del fluido sui risultati appare subito marginale per entrambi i sistemi: sia l'ampiezza dello *zero frequency gap* che l'attenuazione al suo interno rimangono pressoché le stesse, mentre piccole variazioni si registrano nel *band gap* in termini di ampiezza e del picco. La frequenza di chiusura $\bar{\omega}_f$ del *band gap* si riduce leggermente per velocità adimensionali maggiori. Il risultato ottenuto si considera progettuamente

molto positivo poiché implica che il sistema pensato per lavorare a determinate frequenze e con certi valori dei parametri di rigidità e di inerzia, sarà efficiente anche nel caso in cui vi siano non previste variazioni di velocità del fluido.

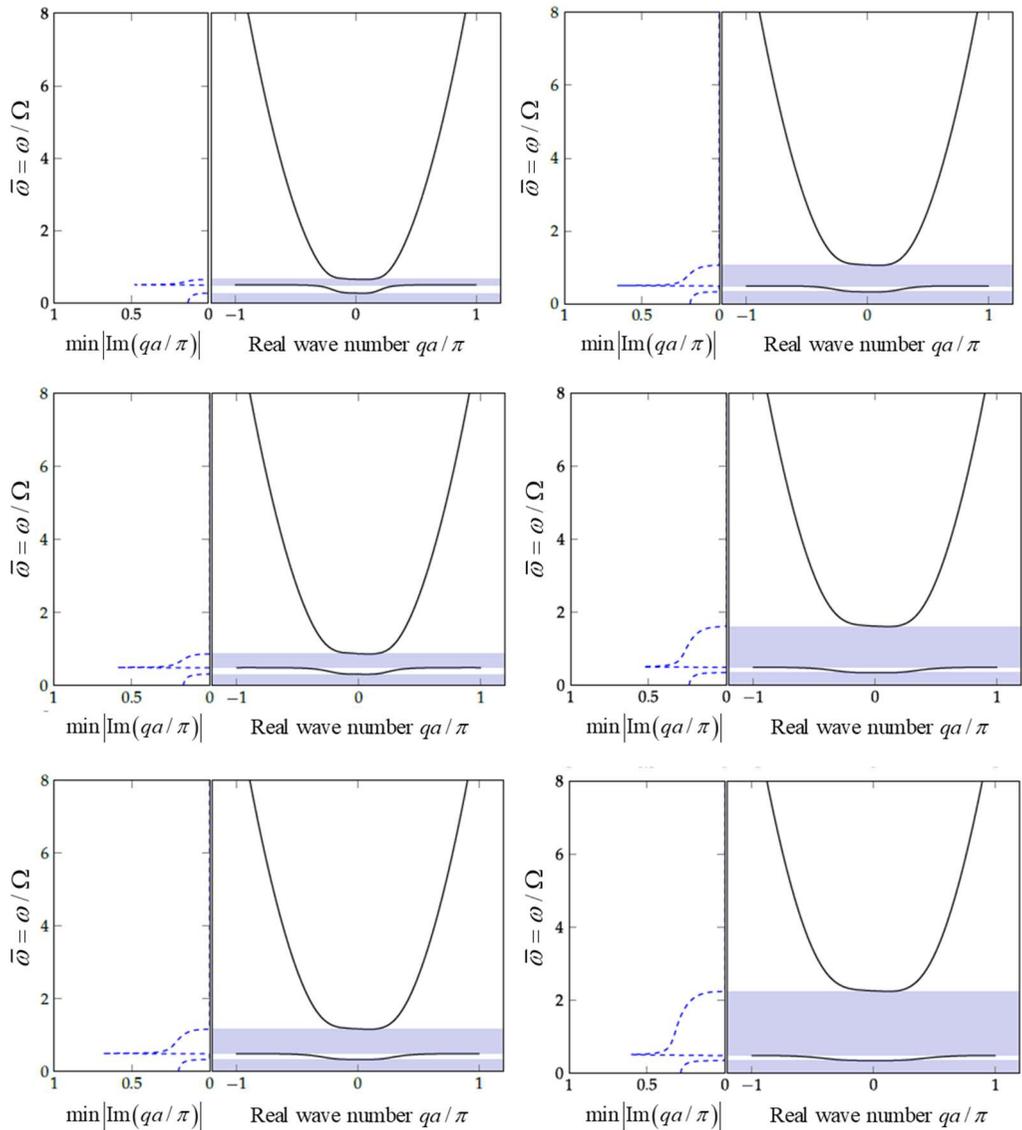


Fig. 3.16: curve di dispersione sistema A (a sinistra) e sistema B (a destra) per $\bar{\omega}_{a,b} = 0.5$, $\alpha = 1.0$, $\eta = 0.1$ per diversi valori, dall'alto verso il basso, di $\mu_j = (2, 5, 10)$

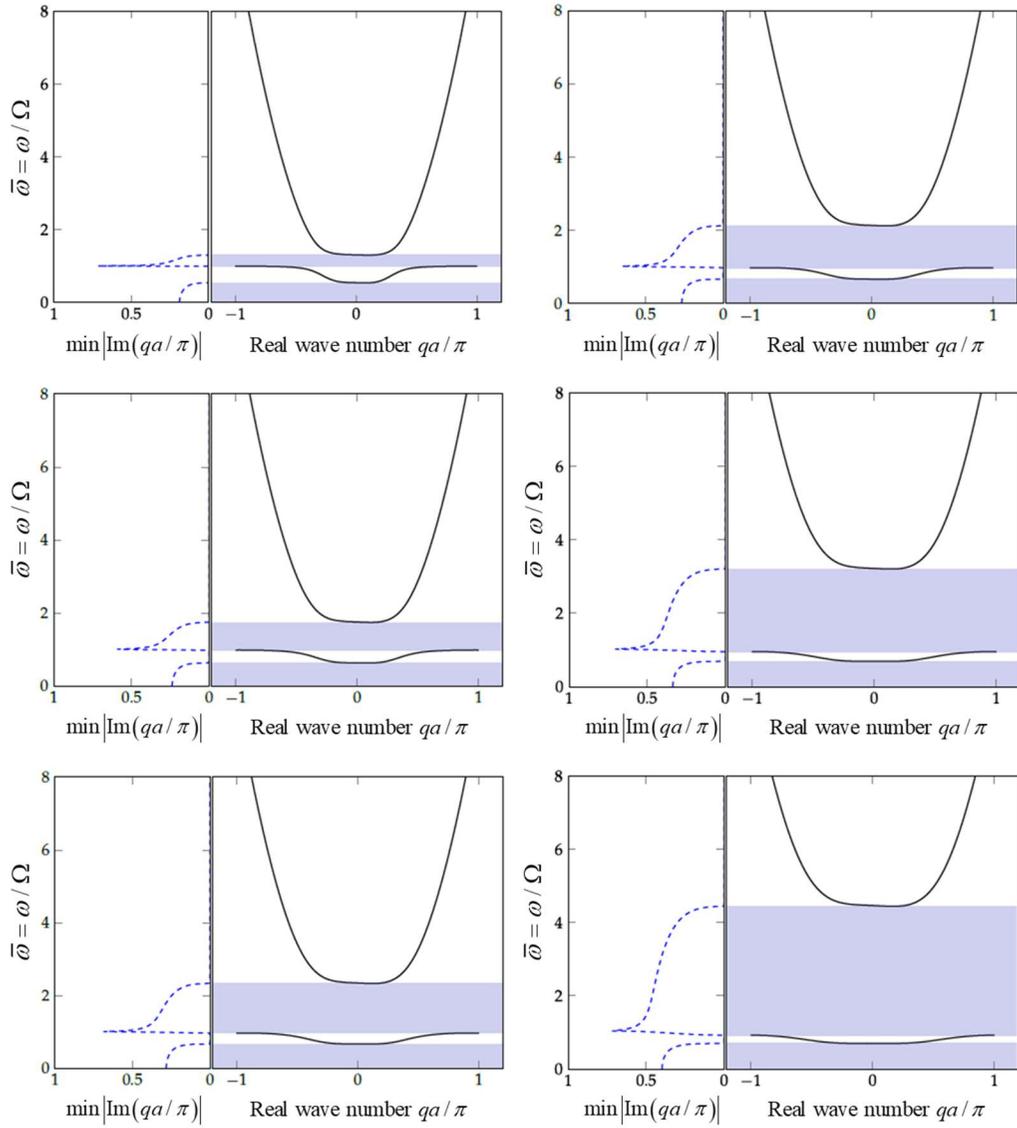


Fig. 3.17: curve di dispersione sistema A (a sinistra) e sistema B (a destra) per $\bar{\omega}_{a,b} = 1.0$, $\alpha = 1.0$, $\eta = 0.1$ per diversi valori, dall'alto verso il basso, di $\mu_j = (2, 5, 10)$

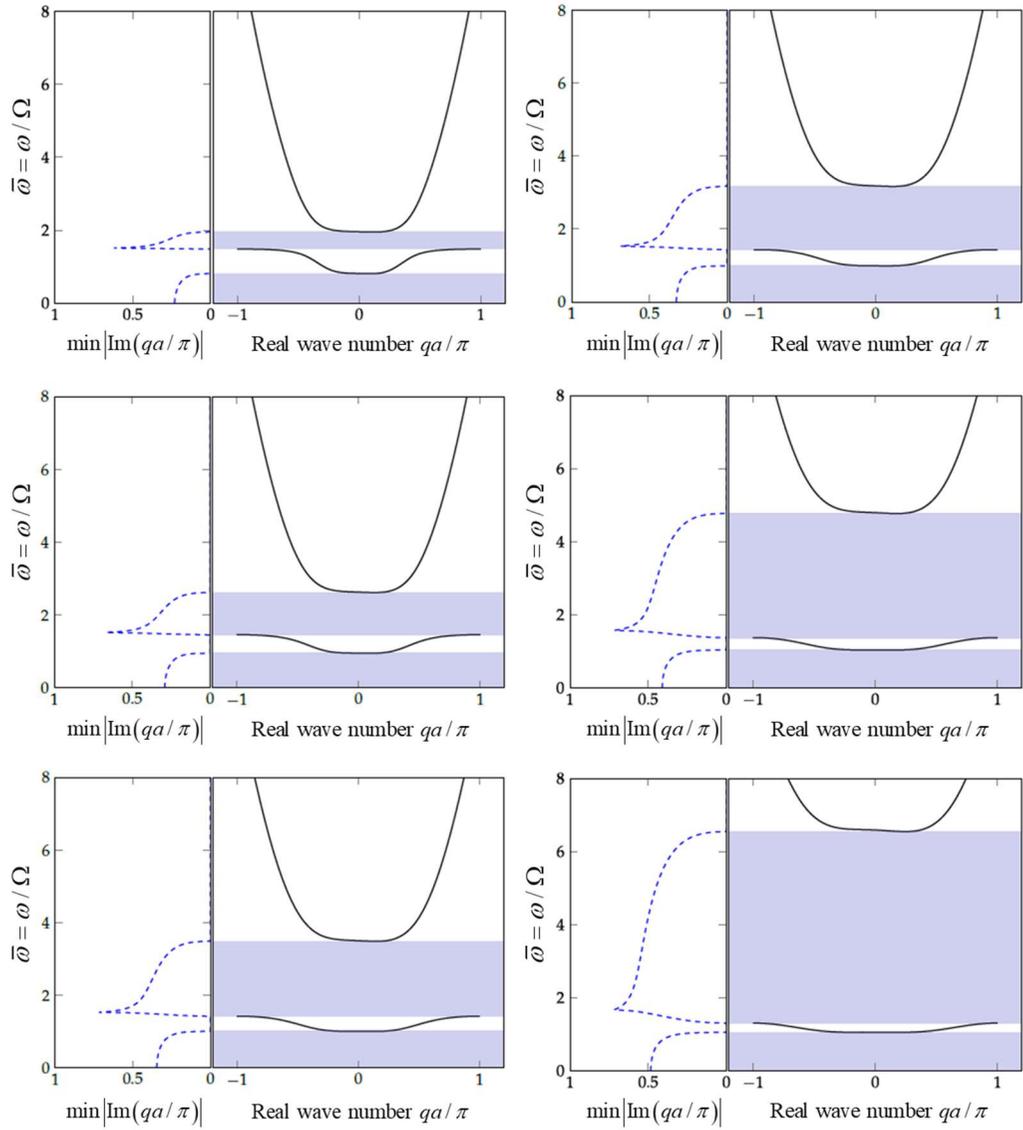


Fig. 3.18: curve di dispersione sistema A (a sinistra) e sistema B (a destra) per $\bar{\omega}_{a,b} = 1.5$, $\alpha = 1.0$, $\eta = 0.1$ per diversi valori, dall'alto verso il basso, di $\mu_j = (2, 5, 10)$

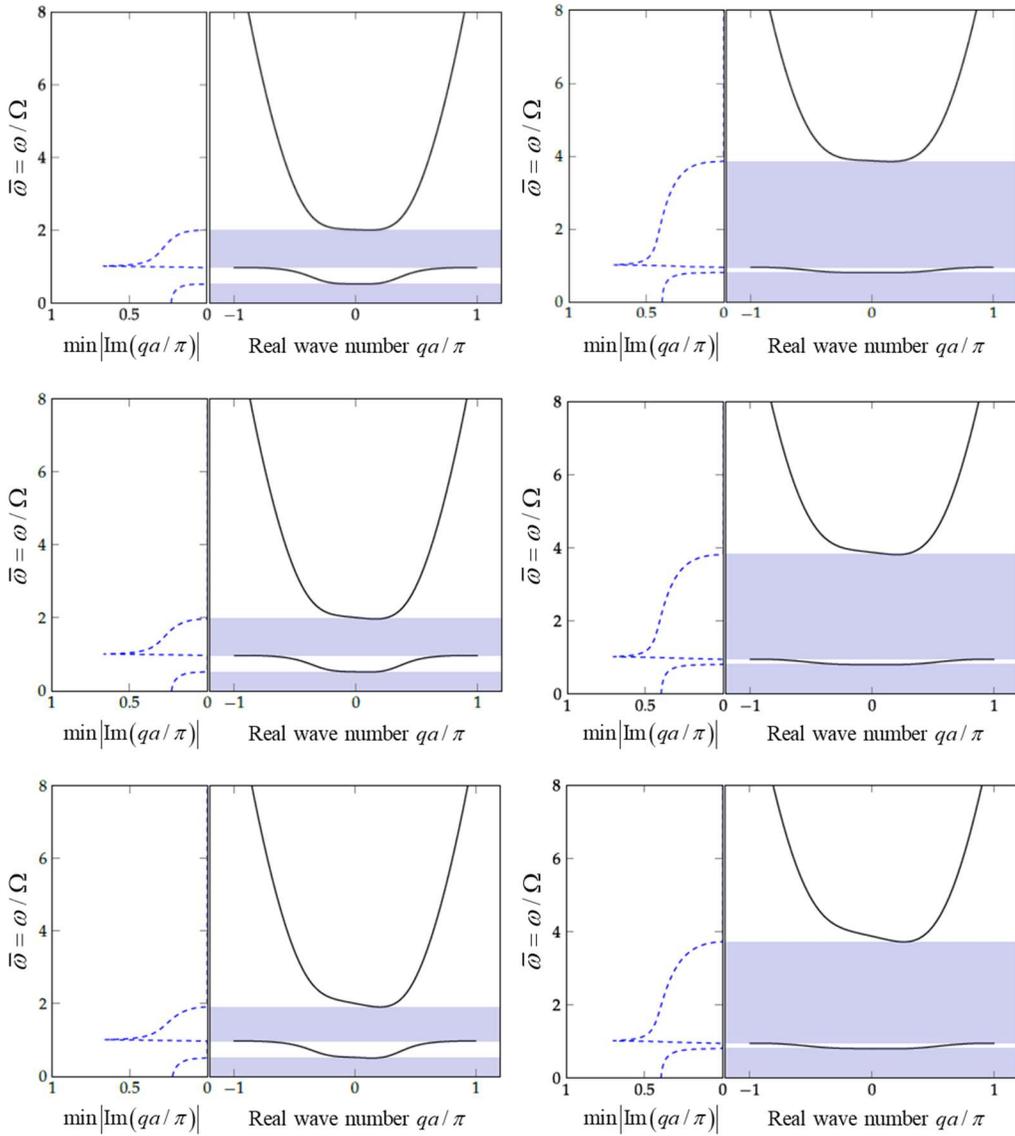


Fig. 3.19: curve di dispersione sistema A (a sinistra) e sistema B (a destra) per $\bar{\omega}_{a,b} = 1.0$, $\alpha = 0.5$, $\mu_J = 5$ per diversi valori, dall'alto verso il basso, di $\eta = (0.1, 0.25, 0.5)$

Si riportano inoltre i grafici parametrici ottenuti per fissati valori del rapporto di rigidità tra le molle $\alpha = 0.5$ e della velocità adimensionale del fluido $\eta = 0.1$ al variare della frequenza di sintonizzazione dei dispositivi $\bar{\omega}_{a,b} \in [0.5, 2.0]$ e del parametro legato all'inertanza $\mu_J \in [2, 10]$, in cui si

studiano l'andamento della frequenza di apertura $\bar{\omega}_i$ e di chiusura $\bar{\omega}_f$ del *band gap* rispetto alla frequenza di sintonizzazione dei dispositivi e la sua ampiezza.

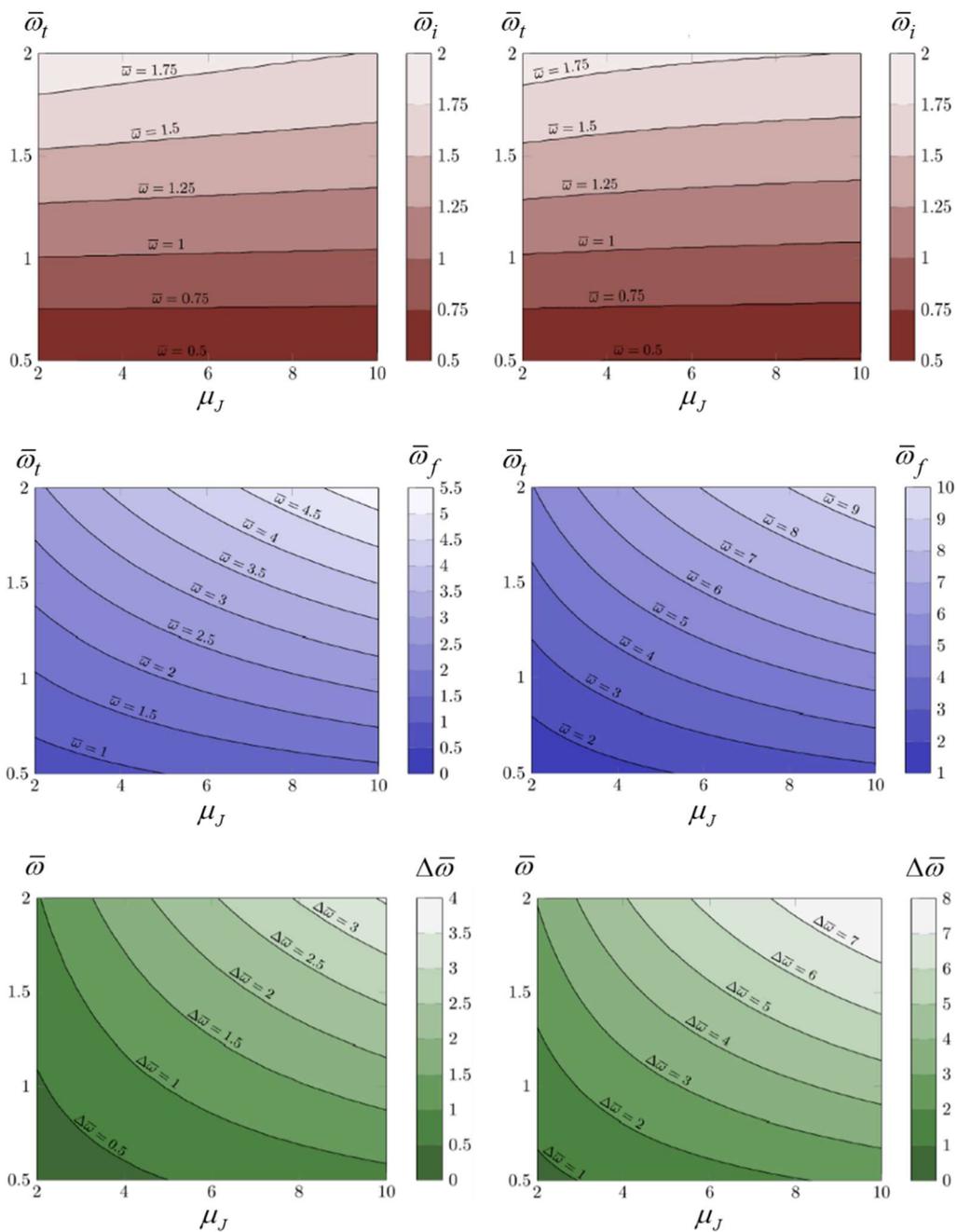
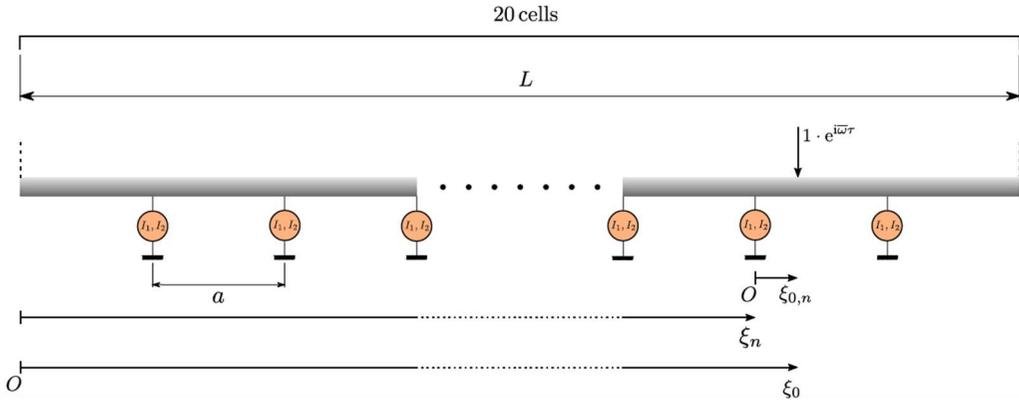


Fig. 3.20: grafici parametrici sistema A (sinistra) e B (destra) con $\bar{\omega}_{a,b} \in [0.5, 2.0]$ e $\mu_J \in [2, 10]$, per l'andamento della frequenza di apertura (in alto), di chiusura (al centro) e dell'ampiezza (in basso) del *band gap*.

Le prove parametriche riassumono il comportamento delle frequenze del sistema al variare dei parametri. Ad esempio, considerando la frequenza di apertura del *band gap* $\bar{\omega}_i$ si vede come essa aumenti al crescere della frequenza di tuning per fissata inertanza, il che è naturale in quanto già secondo teoria il *band gap* si apre nei dintorni della frequenza di tuning, mentre decresce lentamente per fissata frequenza di tuning al crescere dell'inertanza. Come era già stato osservato, si può apprezzare nel grafico come, per fissato μ_J , quando la frequenza di tuning è più alta, la frequenza cui si apre il *band gap* sarà un po' più bassa in quanto sarà più grande la fascia AA di attenuazione prima della fascia C. Per quanto concerne la frequenza di chiusura del *band gap* $\bar{\omega}_f$ e quindi anche la sua ampiezza $\Delta\bar{\omega}$, crescono all'aumentare sia della frequenza di tuning sia dell'inertanza, anche quando uno di questi due parametri rimane fisso. Infine, per quanto concerne le differenze tra i sistemi A e B, benché le tendenze siano le medesime si può vedere, dal confronto tra i valori a barre, che per la frequenza di apertura del *band gap* non vi sono variazioni sostanziali, viceversa per la frequenza di chiusura e per l'ampiezza, i valori nel sistema B sono quasi due volte quelli del sistema A.

3.10. PROVE NUMERICHE CONDOTTA FINITA

Le prove numeriche sulla condotta di lunghezza finita sono state effettuate considerando una tubazione formata da 20 celle e sempre secondo i due set di valori testati e riportati alla (3.138), ovvero per $\alpha = 0.5$, $\eta = 0.1$ fissi, nel primo set $\bar{\omega}_{a,b} = 0.5$, $\mu_J = 5$ mentre nel secondo $\bar{\omega}_{a,b} = 1.5$, $\mu_J = 2$.



Si considera applicato sulla condotta un carico armonico ad ascissa variabile lungo ξ_0 ; per ottenere la trasmittanza, si effettua il rapporto tra la deflessione della condotta all'ascissa $\xi = L/L = 1$ ed il punto in cui il carico viene applicato. Si riporta di seguito cosa avviene quando si considera, per entrambi i sistemi A e B, che il carico armonico sia applicato all'ascissa $\xi_0 = 0.3$ per i due set di parametri.

Dai grafici riportati in **Fig. 3.21**, **Fig. 3.22**, **Fig. 3.23** e **Fig. 3.24** si ha la conferma delle osservazioni risultanti dall'analisi dei risultati per la trave infinita; in particolare, la trasmittanza assume valori bassi nei due *gaps*, in special modo nel *band gap* e si vede come, benché il sistema B sia sempre più performante, il picco più basso della trasmittanza sia paragonabile tra i due sistemi.

Si nota come gli intervalli in cui la trasmittanza assume valori bassi iniziano e terminano a frequenze in accordo a quanto osservato per la trave infinita, e che nel secondo set di parametri si hanno risultati migliori.

Sono altresì riportati i risultati delle analisi condotte considerando una velocità adimensionale maggiore, pari ad $\eta = 0.5$. Si nota che la variazione della velocità del fluido non influisce in modo significativo sul valore di picco negativo della trasmittanza all'interno del *band gap*; inoltre, quando la velocità del fluido cresce, l'ampiezza del *band gap* diminuisce leggermente e la trasmittanza aumenta leggermente alle frequenze vicine alla frequenza di chiusura, come già previsto.

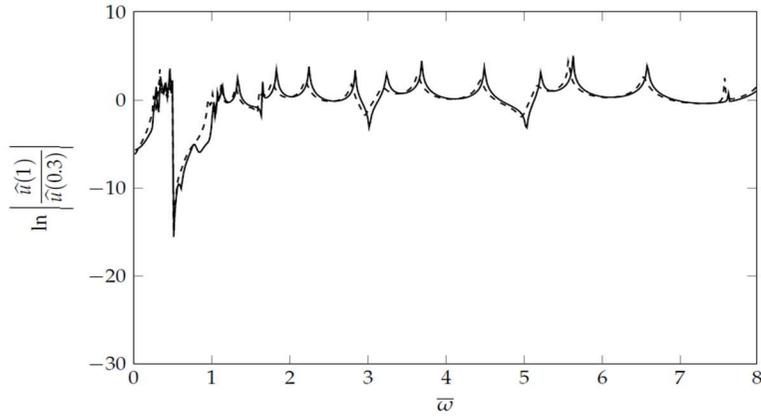


Fig. 3.21: trasmittanza per la condotta poggiate su risonatori di tipo A, con carico armonico applicato all'ascissa $\xi_0 = 0.3$, $\bar{\omega}_a = 0.5$, $\mu_J = 5$, $\alpha = 0.5$ con $\eta = 0.1$ (linea continua) e $\eta = 0.5$ (linea tratteggiata)

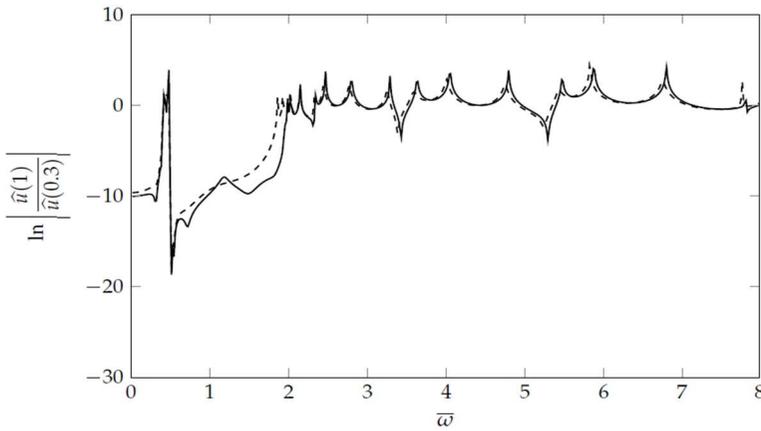


Fig. 3.22: trasmittanza per la condotta poggiate su risonatori di tipo B, con carico armonico applicato all'ascissa $\xi_0 = 0.3$, $\bar{\omega}_a = 0.5$, $\mu_J = 5$, $\alpha = 0.5$ con $\eta = 0.1$ (linea continua) e $\eta = 0.5$ (linea tratteggiata)

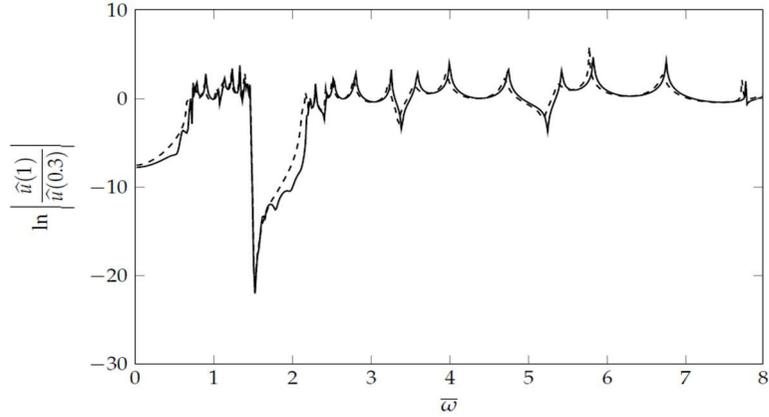


Fig. 3.23: trasmittanza per la condotta poggiante su risonatori di tipo A, con carico armonico applicato all'ascissa $\xi_0 = 0.3$, $\bar{\omega}_a = 1.5$, $\mu_j = 2$, $\alpha = 0.5$ con $\eta = 0.1$ (linea continua) e $\eta = 0.5$ (linea tratteggiata)

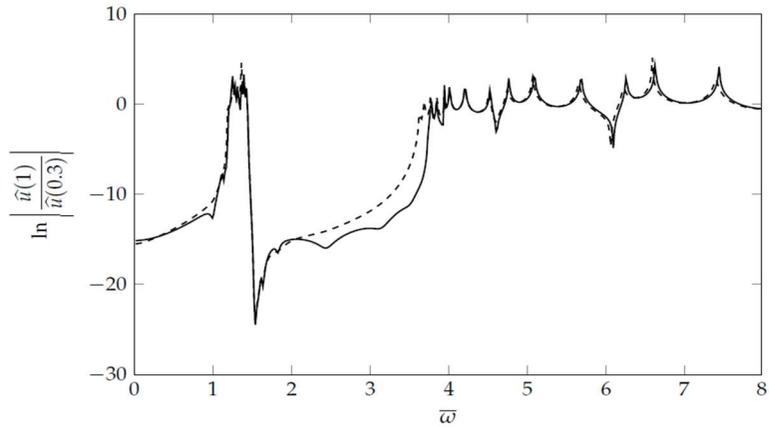


Fig. 3.24: trasmittanza per la condotta poggiante su risonatori di tipo B, con carico armonico applicato all'ascissa $\xi_0 = 0.3$, $\bar{\omega}_a = 1.5$, $\mu_j = 2$, $\alpha = 0.5$ con $\eta = 0.1$ (linea continua) e $\eta = 0.5$ (linea tratteggiata)

Per completezza, le Fig. 3.25 e Fig. 3.26 mostrano la trasmittanza al variare del punto di applicazione del carico sempre per due valori di velocità $\eta = (0.1, 0.5)$; come previsto e già noto in letteratura (Sugino C. et al., 2017), il valore della trasmittanza all'interno del *band gap* assume valori più bassi, che indicano un'attenuazione migliore, al crescere della distanza tra il punto di applicazione del carico e l'estremità sinistra del tubo.

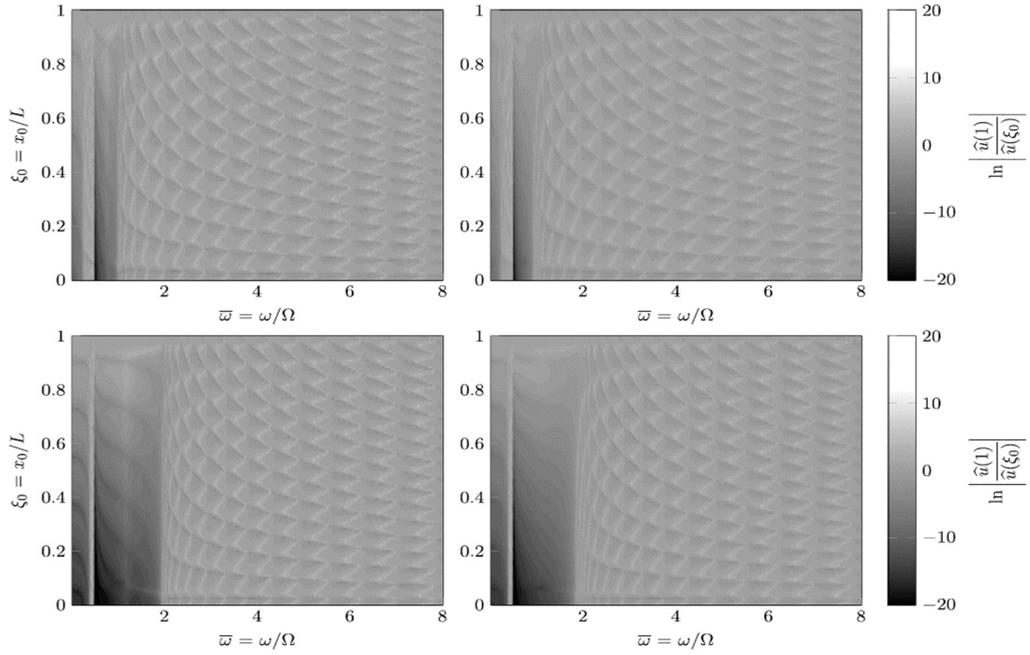


Fig. 3.25: trasmittanza della condotta localmente risonante soggetta a carico armonico applicato ad ascissa variabile, per i risonatori A (in alto) e B (in basso). I valori di progetto assunti sono $\bar{\omega}_a = 0.5$, $\mu_J = 5$, $\alpha = 0.5$ con $\eta = 0.1$ (a sinistra) e $\eta = 0.5$ (a destra)

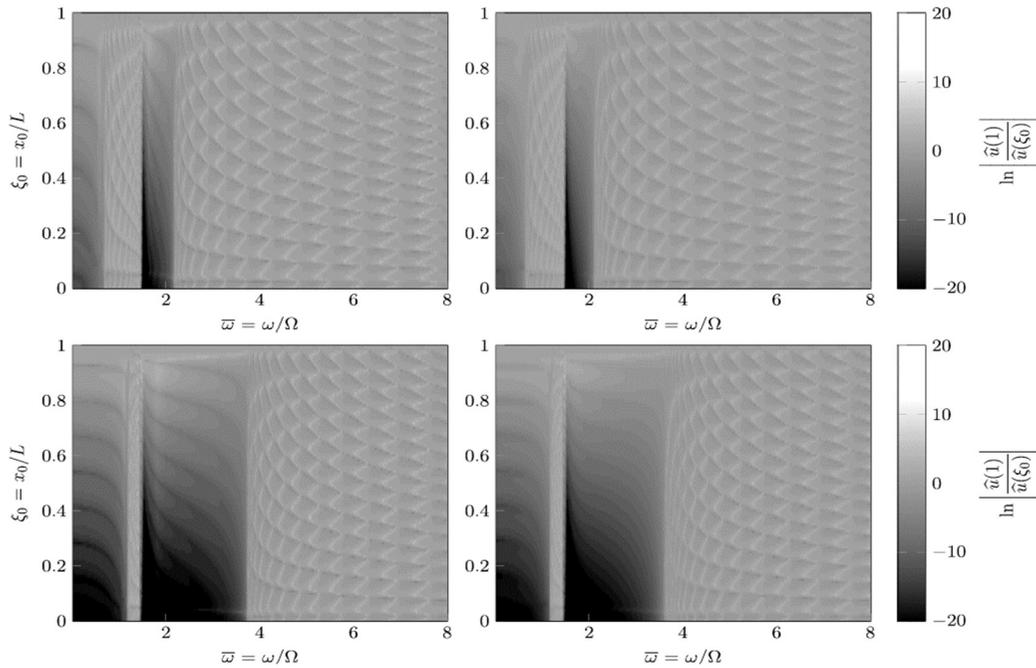


Fig. 3.26: trasmittanza della condotta localmente risonante soggetta a carico armonico applicato ad ascissa variabile, per i risonatori A (in alto) e B (in basso). I valori di progetto assunti sono $\bar{\omega}_a = 1.5$, $\mu_J = 2$, $\alpha = 0.5$ con $\eta = 0.1$ (a sinistra) e $\eta = 0.5$ (a destra)

3.11. RISONATORI A DISTANZA RAVVICINATA

Quando i risonatori sono posti ad una distanza a molto piccola, si può immaginare che essi siano distribuiti con continuità lungo lo sviluppo del tubo. Questa assunzione permette di utilizzare un metodo computazionalmente più semplice per il calcolo delle curve di dispersione, benché perda di validità quando la distanza a inizia a crescere; pertanto, la scelta sull'utilizzo del metodo dipende sia dagli obiettivi che dalle possibilità progettuali. Grazie a tale metodo, noto come metodo dell'omogeneizzazione (HM), è anche possibile ricavare in forma chiusa le espressioni delle frequenze di chiusura dello *zero frequency gap* e del *band gap*.

3.11.1. METODO DELL'OMOGENEIZZAZIONE (HM)

Se la distanza tra i risonatori è molto piccola, e pertanto, tenendo conto della reazione generica $F = -k u$, si può riscrivere la (3.75) come segue:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4} + \mu_f \eta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\mu_f \eta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \chi_j u = 0 \quad (3.145)$$

In cui χ_j è pari alla (3.84) per il risonatore A oppure alla (3.96) per il risonatore B. Tenendo conto della (3.76), si arriva a scrivere la relazione di dispersione come segue:

$$\bar{q}^4 - \mu_f \eta^2 \bar{q}^2 + 2\mu_f \eta \bar{\omega} \bar{q} - \bar{\omega}^2 + \chi_j(\bar{\omega}) = 0 \quad (3.146)$$

Risolvendo l'equazione di quarto grado si trovano le espressioni dei quattro vettori d'onda e, al variare di $\bar{\omega}$, si tracciano le curve di dispersione, le quali permettono di valutare in quali intervalli di frequenza si avrà l'attenuazione della propagazione delle onde lungo la condotta. In corrispondenza della frequenza proprio del risonatore, $\bar{\omega}_a$ o $\bar{\omega}_b$, si apre il *band gap* e da questo valore, per un determinato intervallo $\Delta\bar{\omega}$, le vibrazioni risultano smorzate.

È stato visto che, oltre al *band gap* da risonanza locale che si apre alla frequenza di *tuning* del risonatore, alle basse frequenze si apre lo *zero frequency gap* in cui si registra un'attenuazione delle vibrazioni, anche se qualitativamente inferiore rispetto a quella che si ha nel *band gap*.

A partire dalla relazione di dispersione è possibile trovare le frequenze di chiusura dello *zero frequency gap* e del *band gap*. Per il sistema con risonatori in configurazione A, si sostituisce la (3.92) nella (3.146):

$$\bar{q}^4 - \mu_f \eta^2 \bar{q}^2 + 2\mu_f \eta \bar{\omega} \bar{q} - \bar{\omega}^2 + \frac{\mu_j \bar{\omega}_a^2 \left(\frac{1}{(1+\alpha)} \right) \left(\frac{\alpha}{(1+\alpha)} - \frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}_a^2} \right)}{1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}_a^2}} = 0 \quad (3.147)$$

$$\left(\bar{q}^4 - \mu_f \eta^2 \bar{q}^2 + 2\mu_f \eta \bar{\omega} \bar{q} - \bar{\omega}^2 \right) \left(1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}_a^2} \right) + \mu_j \bar{\omega}_a^2 \left(\frac{1}{(1+\alpha)} \right) \left(\frac{\alpha}{(1+\alpha)} - \frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}_a^2} \right) = 0 \quad (3.148)$$

Per $\bar{q} = 0$ è possibile trovare le frequenze di chiusura dei due *gaps*, ovvero i valori per i quali le curve di dispersione intersecano l'asse delle $\bar{\omega}$ nel piano $\bar{\omega}-\bar{q}$ in cui si rappresentano le curve di dispersione:

$$\left(-\bar{\omega}^2 \right) \left(1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}_a^2} \right) + \mu_j \bar{\omega}_a^2 \left(\frac{1}{(1+\alpha)} \right) \left(\frac{\alpha}{(1+\alpha)} - \frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}_a^2} \right) = 0 \quad (3.149)$$

$$\left(-\bar{\omega}^2 - \frac{\bar{\omega}^4}{\bar{\omega}_a^2} \right) + \left[\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} \right] \mu_j \bar{\omega}_a^2 - \frac{\mu_j}{(1+\alpha)} \frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}_a^2} = 0 \quad (3.150)$$

$$\bar{\omega}^4 + \left[\bar{\omega}_a^2 + \frac{\mu_j}{(1+\alpha)\bar{\omega}_a^2} \right] \bar{\omega}^2 - \left[\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} \right] \mu_j \bar{\omega}_a^2 = 0 \quad (3.151)$$

Risolvendo la (3.151) in $\bar{\omega}^2$ si trovano due soluzioni, le cui radici forniscono la frequenza di chiusura dello *zero frequency gap* $\bar{\omega}_z$ e la frequenza di chiusura del *band gap* $\bar{\omega}_f$ come segue:

$$\bar{\omega}_z = \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{\omega}_a \delta_a(\alpha, \mu_j) \quad (3.152)$$

$$\bar{\omega}_f = \frac{\sqrt{2}}{2} \bar{\omega}_a \gamma_a(\alpha, \mu_j) \quad (3.153)$$

Nelle quali sono state fatte le posizioni:

$$\delta_a(\alpha, \mu_j) = \sqrt{\left(1 + \frac{\mu_j}{1+\alpha} - \sqrt{-\frac{4\mu_j\alpha}{(1+\alpha)^2} + \left(-1 - \frac{\mu_j}{1+\alpha}\right)^2}\right)} \quad (3.154)$$

$$\gamma_a(\alpha, \mu_j) = \sqrt{\left(1 + \frac{\mu_j}{1+\alpha} + \sqrt{-\frac{4\mu_j\alpha}{(1+\alpha)^2} + \left(-1 - \frac{\mu_j}{1+\alpha}\right)^2}\right)} \quad (3.155)$$

Dalla (3.153) si deduce che la frequenza di chiusura del *band gap*, e quindi la sua ampiezza $\Delta\bar{\omega}$, non dipendono né dal parametro adimensionale di velocità η né dal parametro adimensionale di massa μ_f , ma solo da μ_j (al cui interno vi sono J, m_t, a) e dal rapporto tra le rigidezze α .

Per il sistema con i risonatori in configurazione B, si sostituisce la (3.101) nella (3.146):

$$\bar{q}^4 - \mu_f \eta^2 \bar{q}^2 + 2\mu_f \eta \bar{\omega} \bar{q} - \bar{\omega}^2 + \frac{(1+\alpha) \mu_j \bar{\omega}_b^2 \left[\frac{1}{(1+\alpha)} - \frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}_b^2} \right]}{1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}_b^2}} = 0 \quad (3.156)$$

$$\left(\bar{q}^4 - \mu_f \eta^2 \bar{q}^2 + 2\mu_f \eta \bar{\omega} \bar{q} - \bar{\omega}^2\right) \left(1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}_b^2}\right) + \frac{(1+\alpha)}{\alpha} \mu_j \bar{\omega}_b^2 \left[\frac{1}{(1+\alpha)} - \frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}_b^2} \right] = 0 \quad (3.157)$$

Per $\bar{q} = 0$:

$$\left(-\bar{\omega}^2\right)\left(1-\frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}_b^2}\right)+\frac{(1+\alpha)}{\alpha}\mu_j\bar{\omega}_b^2\left[\frac{1}{(1+\alpha)}-\frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}_b^2}\right]=0 \quad (3.158)$$

$$-\bar{\omega}^2-\frac{\bar{\omega}^4}{\bar{\omega}_b^2}+\frac{1}{\alpha}\mu_j\bar{\omega}_b^2-\frac{(1+\alpha)}{\alpha}\frac{(\mu_j\bar{\omega}_b^2)}{\bar{\omega}_b^2}\bar{\omega}^2=0 \quad (3.159)$$

$$\bar{\omega}^4+\left[\bar{\omega}_b^2+\frac{(1+\alpha)}{\alpha}(\mu_j\bar{\omega}_b^2)\right]\bar{\omega}^2-\frac{1}{\alpha}\mu_j\bar{\omega}_b^4=0 \quad (3.160)$$

Risolviendo la (3.160) in $\bar{\omega}^2$ si trovano le due soluzioni, le cui radici forniscono i valori della frequenza di chiusura dello *zero frequency gap* e del *band gap*:

$$\bar{\omega}_z = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{\omega}_b\delta_b(\alpha,\mu_j) \quad (3.161)$$

$$\bar{\omega}_f = \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{\omega}_b\gamma_b(\alpha,\mu_j) \quad (3.162)$$

Nei quali si è posto:

$$\delta_b(\alpha,\mu_j) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\left(1+\mu_j+\frac{\mu_j\alpha}{\alpha}-\frac{\sqrt{\mu_j^2-2\mu_j\alpha+2\mu_j^2\alpha+\alpha^2+2\mu_j\alpha^2+\mu_j^2\alpha^2}}{\alpha}\right)} \quad (3.163)$$

$$\gamma_b(\alpha,\mu_j) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\mu_j+\frac{\mu_j}{\alpha}+\frac{\sqrt{\mu_j^2-2\mu_j\alpha+2\mu_j^2\alpha+\alpha^2+2\mu_j\alpha^2+\mu_j^2\alpha^2}}{\alpha}} \quad (3.164)$$

3.11.2. SURFACE PLOTS

I parametri che intervengono nel problema non sono tra loro indipendenti e le relazioni che intercorrono tra loro possono essere studiate e visualizzate con semplicità considerando dei *Surface plots*.

Nella **Fig. 3.27 (a)** è possibile notare il legame tra la frequenza di apertura del *band gap* $\bar{\omega}_i$ e la frequenza di sintonizzazione del risonatore $\bar{\omega}_a$, rappresentato da una retta con inclinazione a 45° in quanto, come ci si aspetta se il sistema lavora correttamente, il *band gap* deve aprirsi esattamente alla frequenza di sintonizzazione scelta per i dispositivi. Si noti come la frequenza di inizio del *band gap* sia assolutamente indipendente dal parametro legato all'inertanza μ_J ; tale osservazione è importante perché nel caso in cui si volesse spostare il *band gap* verso altre frequenze, variare il valore di μ_J non servirebbe allo scopo.

Nella **Fig. 3.27 (b)** è rappresentata la relazione tra la frequenza di chiusura del *band gap* $\bar{\omega}_f$ e i due parametri fondamentali $\bar{\omega}_a$ e μ_J : il *band gap* diventa più ampio al crescere di entrambi i parametri fondamentali, soprattutto all'aumentare della frequenza di sintonizzazione.

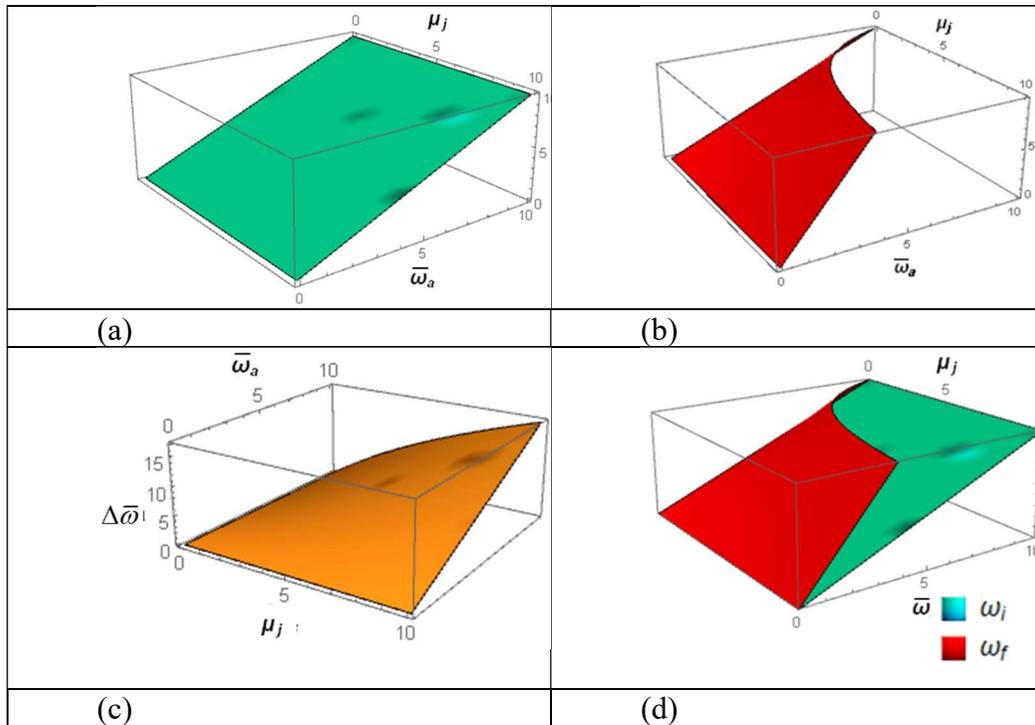


Fig. 3.27: Surface Plots **(a)** relazione tra la frequenza di inizio del *band gap* $\bar{\omega}_i$, la frequenza di sintonizzazione del dispositivo $\bar{\omega}_a$ e il parametro legato all'inertanza μ_j ; **(b)** relazione tra la frequenza di fine del *band gap* $\bar{\omega}_f$, la frequenza di sintonizzazione del dispositivo $\bar{\omega}_a$ e il parametro legato all'inertanza μ_j ; **(c)** relazione tra la frequenza di sintonizzazione del dispositivo $\bar{\omega}_a$, il parametro legato all'inertanza μ_j e l'ampiezza del *band gap* totale $\Delta\bar{\omega}$; **(d)** sovrapposizione delle superfici (a) e (b).

Dalla **Fig. 3.27 (c)** è evidente come ovviamente all'annullarsi del parametro legato all'inertanza o della frequenza di sintonizzazione, non si avrà il *band gap* e pertanto l'ampiezza $\Delta\bar{\omega}$ dell'intervallo di controllo delle vibrazioni sarà nulla. Il $\Delta\bar{\omega}$ cresce all'aumentare dei due parametri $\bar{\omega}_a$ e μ_j .

Nella **Fig. 3.27 (d)** sono state sovrapposte le superfici relative all'andamento della frequenza di apertura $\bar{\omega}_i$ e di chiusura $\bar{\omega}_f$ del *band gap* rispetto ai parametri fondamentali; naturalmente la superficie rappresentativa della frequenza di chiusura si trova al di sopra della superficie legata a $\bar{\omega}_i$, e la

distanza tra le due superfici dà la misura dell'ampiezza $\Delta\bar{\omega}$ dell'intervallo in cui le vibrazioni non si propagano.

Si riportano anche per il sistema B i Surface Plots, per i quali valgono le medesime osservazioni:

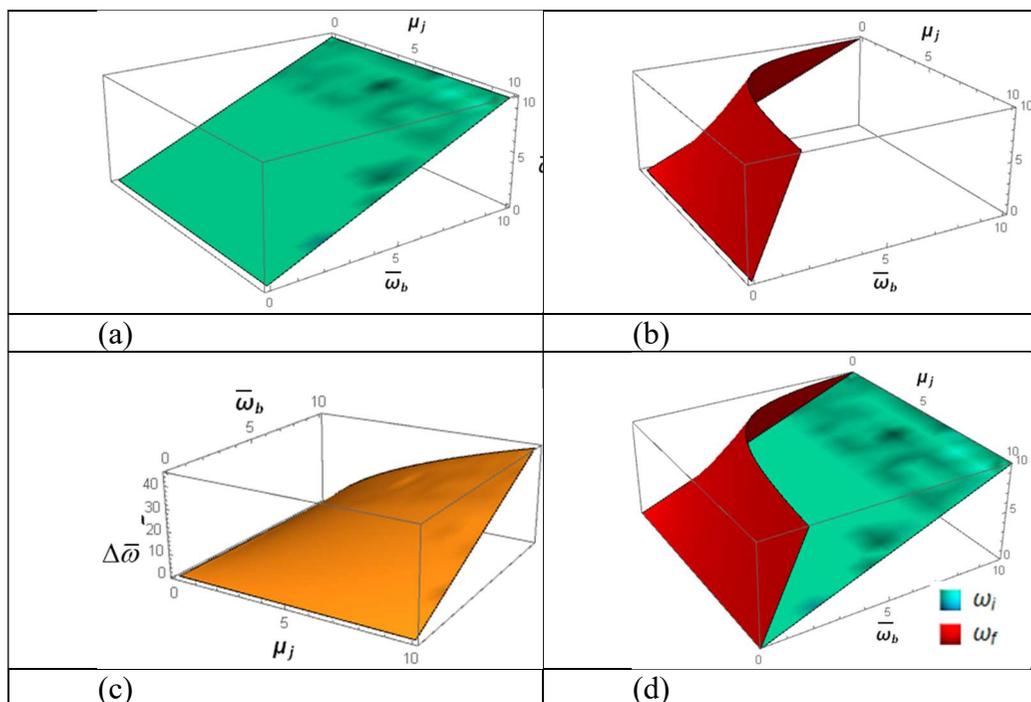


Fig. 3.28: Surface Plots (a) relazione tra la frequenza di inizio del *band gap* $\bar{\omega}_b$, la frequenza di sintonizzazione del dispositivo $\bar{\omega}_b$ e il parametro legato all'inertanza μ_j ; (b) relazione tra la frequenza di fine del *band gap* $\bar{\omega}_f$, la frequenza di sintonizzazione del dispositivo $\bar{\omega}_b$ e il parametro legato all'inertanza μ_j ; (c) relazione tra la frequenza di sintonizzazione del dispositivo $\bar{\omega}_b$, il parametro legato all'inertanza μ_j e l'ampiezza del *band gap totale* $\Delta\bar{\omega}$; (d) sovrapposizione delle superfici (a) e (b).

3.11.3. PROGETTAZIONE DEI DISPOSITIVI

Gli studi condotti e le analisi effettuate sul sistema A hanno permesso di conoscere le caratteristiche comportamentali del suddetto sistema e di predire quale sarà una possibile risposta al variare della frequenza di sintonizzazione adimensionale dei dispositivi $\bar{\omega}_a$ e del parametro legato all'inertanza μ_j . Le prove sono state eseguite scegliendo diversi valori per $\bar{\omega}_a$ e per μ_j , sulla base

dei risultati delle prove dimensionali su un sistema tipo. Tuttavia, in fase progettuale, quando si hanno a disposizione le informazioni circa una determinata sollecitazione, con una frequenza o un range di frequenze caratteristico, i risonatori devono essere realizzati e progettati per controllare le vibrazioni dell'input noto, e pertanto le caratteristiche dei dispositivi vanno determinate in fase progettuale sapendo *a priori* l'obiettivo da raggiungere.

Progettare i risonatori si traduce nel determinare $\bar{\omega}_a$ e μ_J ; nel caso in cui la distanza a tra i risonatori è molto piccola, il problema si può risolvere con il metodo dell'omogeneizzazione, come visto al § 3.11.1, ed è possibile ricavare in forma chiusa l'espressione della frequenza di chiusura del *band gap*, riportata alla (3.153); al variare di μ_J cambia anche la frequenza di chiusura e il legame tra $\bar{\omega}_a$ e $\bar{\omega}_f$ è dato da una retta diversa per ogni valore di μ_J desiderato.

La frequenza $\bar{\omega}$ di inizio del *band gap* sarà sempre pari alla frequenza di sintonizzazione $\bar{\omega}_a$ e pertanto il loro legame è rappresentabile mediante una retta inclinata a 45° .

Le relazioni discusse sono rappresentabili nel piano $\bar{\omega} - \bar{\omega}_a$ dal seguente grafico di progetto 1:

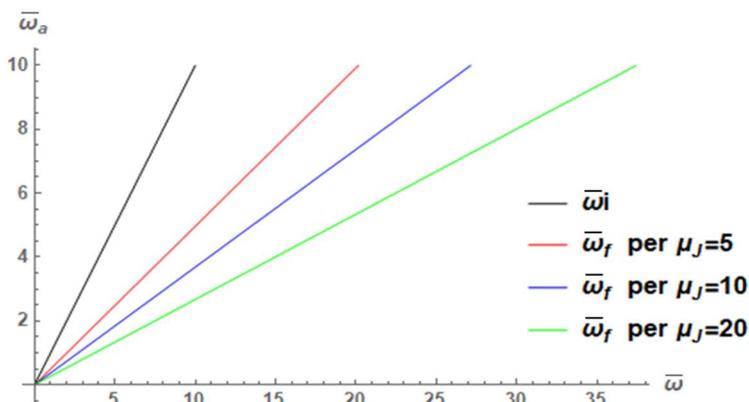


Fig. 3.29: grafico di progetto 1, in cui sono presenti le rette con cui variano la frequenza di sintonizzazione dei risonatori del sistema A e le frequenze di apertura e chiusura del *band gap* per diversi valori del parametro legato all'inertanza al variare della frequenza.

Il grafico in **Fig. 3.29** può essere utilizzato in due modi diversi, a scopi progettuali.

Caso (1): viene scelta la frequenza di sintonizzazione dei risonatori $\bar{\omega}_a$ in ordinata ed è disponibile da progetto un determinato valore di inertanza, con il quale viene fissato μ_J . Si può ad esempio fissare per la frequenza di sintonizzazione il valore $\bar{\omega}_a = 4$ e per $\mu_J = 20$. Individuate le due rette corrispondenti nel grafico in **Fig. 3.29**, si procede come segue per individuare l'entità dell'intervallo di frequenze adimensionali $\Delta\bar{\omega}$ all'interno del quale le vibrazioni non possono propagarsi lungo la condotta: nell'asse delle ordinate, in corrispondenza del valore scelto di $\bar{\omega}_a$, si traccia una retta orizzontale, tratteggiata in **Fig. 3.30** la quale interseca la retta relativa all'andamento di $\bar{\omega}_i$ e la retta relativa all'andamento di $\bar{\omega}_f$ per fissato μ_J ; dalle intersezioni risultano individuati due punti. La proiezione dei suddetti punti sull'asse delle ascisse fornisce i valori di apertura e chiusura del *band gap* per il caso considerato e pertanto fornisce la misura dell'entità $\Delta\bar{\omega}$ dell'intervallo di attenuazione.

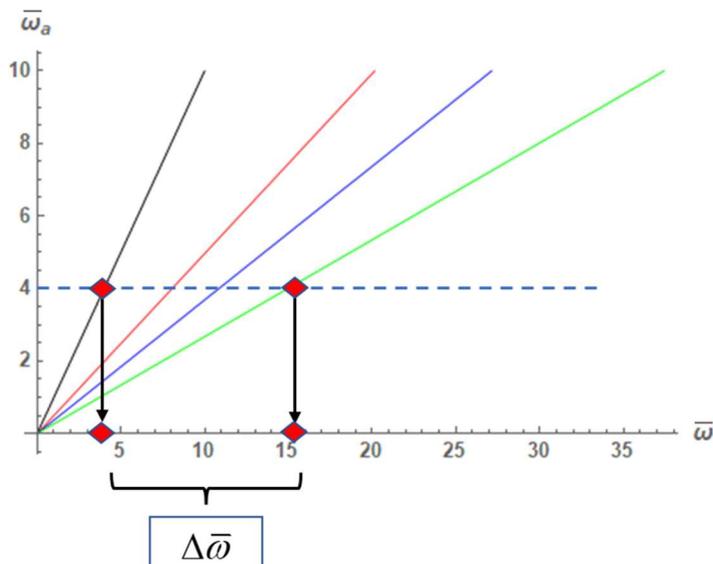


Fig. 3.30: grafico di progetto 1, utilizzato fissando il valore della frequenza di sintonizzazione dei risonatori e del parametro legato all'inertanza, per ricavare l'ampiezza del *band gap*.

Caso (2): si considera una forzante avente un determinato contenuto energetico a determinate frequenze; si fissa l'intervallo $\Delta\bar{\omega}$ nel quale si vuole attenuare la propagazione delle vibrazioni innescate da tale forzante e questo è il *band gap*, che ha una determinata collocazione lungo l'asse delle ascisse; pertanto, sono note le frequenze di apertura e chiusura posizionate su tale asse. Si ha la proiezione in giallo nella **Fig. 3.31** dell'intervallo considerato, che interseca la retta delle $\bar{\omega}_i$ in un punto cui corrisponde il valore di $\bar{\omega}_a$ lungo l'asse delle ordinate. Tracciando una retta orizzontale in corrispondenza di $\bar{\omega}_a$ ed una retta verticale in corrispondenza del valore finale dell'intervallo $\Delta\bar{\omega}$, si troverà un punto che sarà probabilmente compreso tra due rette relative ai valori di $\bar{\omega}_f$ al variare di μ_J : significa che il valore del parametro legato all'inertanza da scegliere in fase progettuale deve stare all'interno della forchetta trovata e delimitata da due rette di $\bar{\omega}_f$, al fine di ottenere un *band gap* che si apra e si chiuda alle frequenze stabilite. Nell'esempio riportato, μ_J dovrà essere compreso tra 10 e 15.

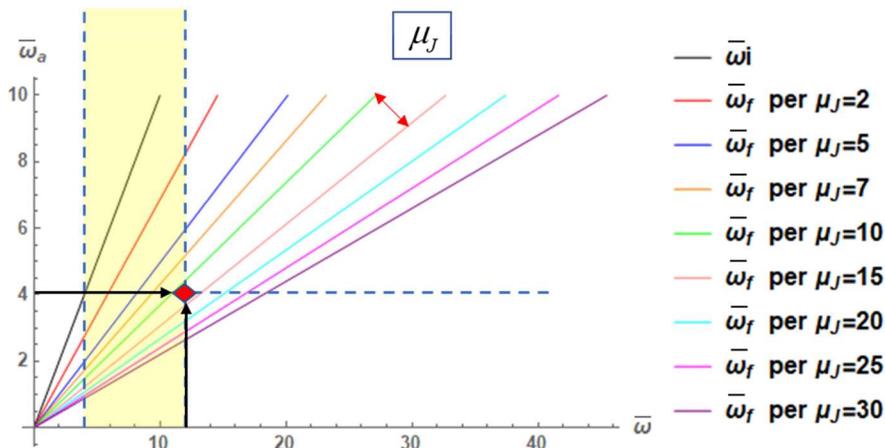


Fig. 3.31: grafico di progetto 1, utilizzato fissando la frequenza di apertura del *band gap* e la sua ampiezza, al fine di ricavare il valore del parametro legato all'inertanza da utilizzare per ottenere i risultati prefissati.

Per la scelta dei parametri dei risonatori, si può anche utilizzare il grafico di progetto 2, rappresentato in **Fig. 3.32**. Dalle espressioni delle curve di dispersione trovate grazie al metodo dell'omogeneizzazione, noti i valori dei parametri μ_f , η e χ_a , si possono rappresentare curve che, al variare di $\bar{\omega}_a$ e μ_j , individuano specifici valori dell'ampiezza del *band gap* $\Delta\bar{\omega}$.

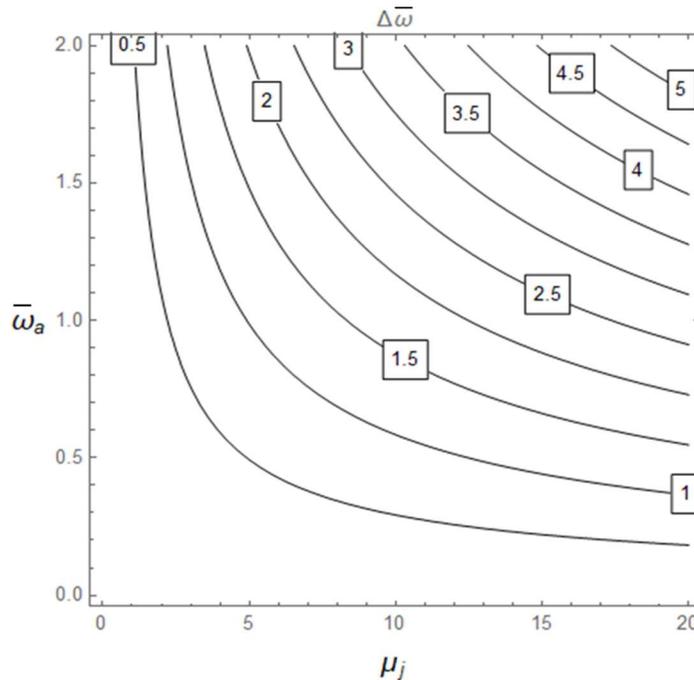


Fig. 3.32: grafico di progetto 2

Il grafico di progetto 2 può essere anch'esso utilizzato in due modi.

Caso (1): Fissato il valore della frequenza di risonanza e scelto l'intervallo di frequenze nel quale si vuole ottenere la dissipazione delle vibrazioni, si trova il valore puntuale del parametro legato all'inertanza. Ad esempio in **Fig. 3.33** stato scelto un valore di $\bar{\omega}_a = 1$ e un *band gap* di ampiezza $\Delta\bar{\omega} = 2$ ed è possibile trovare un valore esatto di μ_j , al contrario del caso precedente del grafico di progetto 1, nel quale μ_j era contenuto all'interno di una forchetta di valori.

Caso (2): assegnato il valore del parametro legato all'inertanza e della frequenza di sintonizzazione, si trova una stima dell'ampiezza del *band gap*

ottenuto dai parametri scelti. Ad esempio in **Fig. 3.34** con $\bar{\omega}_a = 1$ e avendo in fase progettuale la possibilità di fissare $\mu_j = 15$, si ottiene $\Delta\bar{\omega}$ compreso tra (2–2.5).

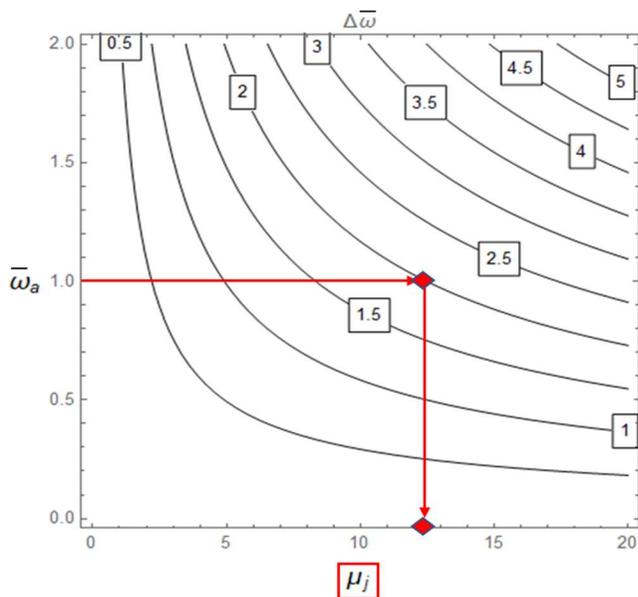


Fig. 3.33: grafico di progetto 2 utilizzato fissando la frequenza adimensionale di apertura del *band gap* e la sua ampiezza, al fine di ricavare il parametro legato all'inertanza

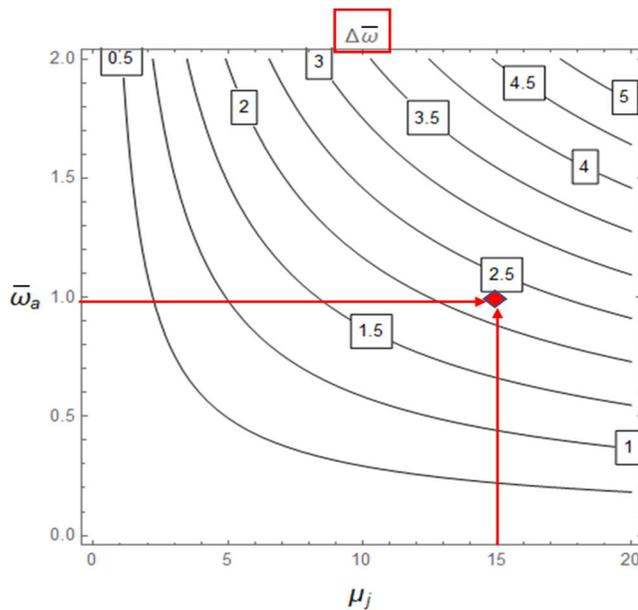


Fig. 3.34: grafico di progetto 2 utilizzato fissando la frequenza adimensionale di apertura del *band gap* e il parametro legato all'inertanza, per stimare l'ampiezza dell'intervallo di controllo delle vibrazioni

Esattamente come descritto per il sistema A, i risonatori con inerter del sistema B vanno progettati in termini di $\bar{\omega}_b$ e μ_J . Sono stati redatti i grafici di progetto 1 e 2, dai quali è possibile ricavare, fissata la frequenza di inizio del *band gap*, o la sua ampiezza $\Delta\bar{\omega}$ oppure il parametro legato all'inerterza μ_J .

Si riportano i grafici di progetto 1 e 2 per il sistema B.

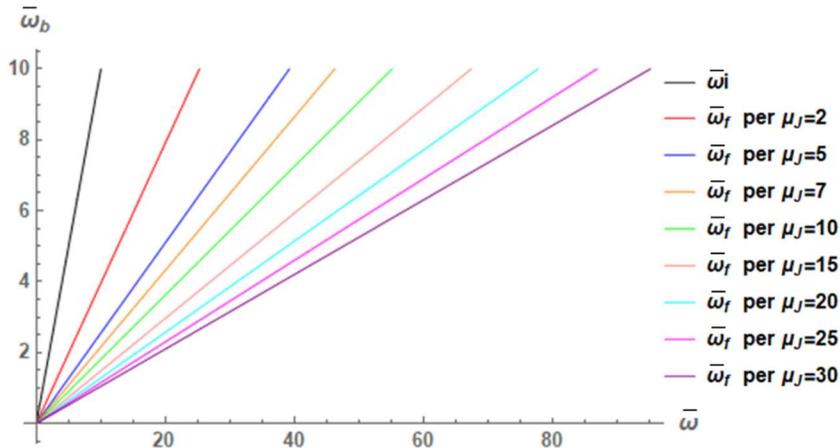


Fig. 3.35: grafico di progetto 1 per il sistema B; sono presenti le rette con cui variano la frequenza di sintonizzazione dei risonatori del sistema a e le frequenze di apertura e chiusura del *band gap* per diversi valori del parametro legato all'inerterza al variare della frequenza.

Si ricorda che il grafico di progetto 1 in **Fig. 3.35** ha un duplice utilizzo: per fissata frequenza di risonanza e inerterza, si stima l'ampiezza del *band gap* risultante, oppure fissato l'intervallo di frequenze in cui è necessario che le vibrazioni non si propaghino, si individua un punto che sarà probabilmente compreso tra due rette, che individuano indicativamente i valori del range in cui è bene scegliere il valore del parametro legato all'inerterza.

Il grafico di progetto 2 in **Fig. 3.36** ha anch'esso due modalità di utilizzo: per fissato valore della frequenza di risonanza e dell'ampiezza del *band gap*, si determina o il parametro legato all'inerterza stavolta in modo puntuale, a differenza del grafico di progetto 1 in cui il valore era compreso all'interno del range delimitato dalle due rette, oppure si stima approssimativamente l'intervallo

$\Delta\bar{\omega}$ in cui le onde non si propagano compreso tra due delle curve rappresentate, per determinati valori di $\bar{\omega}_b$ e μ_j .

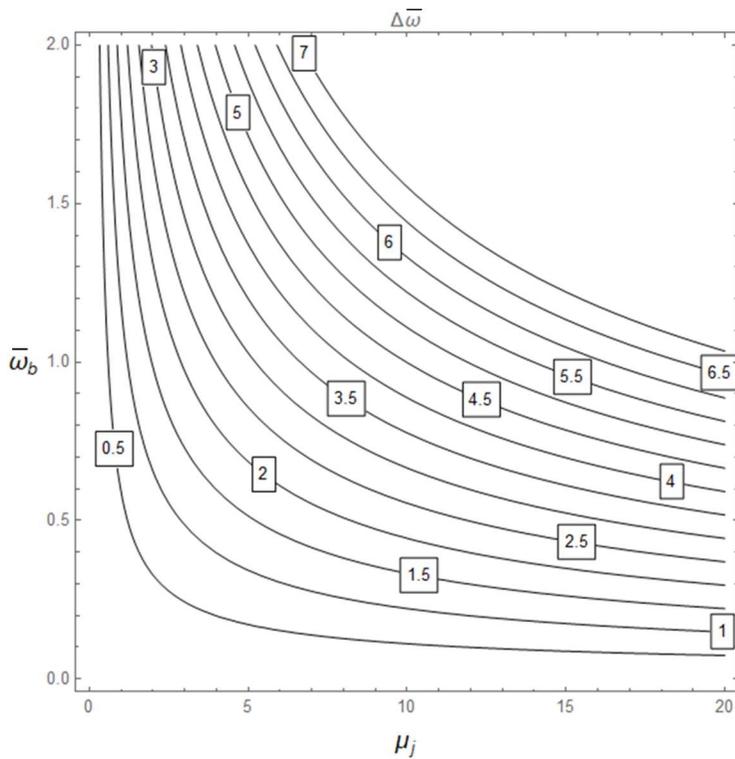


Fig. 3.36: grafico di progetto 2 per il sistema B, in cui sono presenti le curve relative a determinati valori di ampiezza del *band gap*. Ogni punto di ogni curva si riferisce ad uno specifico valore di frequenza di sintonizzazione del risonatore e ad uno specifico valore del parametro legato all’inertanza.

3.12. CENNI SUGLI STUDI DELLE INCERTEZZE NEI SISTEMI RISONANTI

Uno degli aspetti che studi recenti stanno tenendo in considerazione circa l’analisi di sistemi localmente risonanti è l’influenza delle incertezze sulla correttezza dei risultati ottenuti. In particolare, è di interesse indagare cosa avviene nel caso in cui proprietà dei risonatori quali massa, smorzamento e rigidità, non sono definiti con certezza. Il risultato di analisi ad intervalli (Santoro R. et al., 2023) ha

evidenziato come in alcuni casi per parametri incerti non è detto che si riesca a trovare il *band gap* e quindi un'attenuazione delle onde elastiche.

Benché a livello microscopico si è visto che piccole imperfezioni sulla struttura periodica non alterano la risposta nel *band gap* (Jensen J.S., 2003), in campo macroscopico l'influenza è apprezzabile. Ad esempio, è stata studiata in ambito industriale l'influenza sui sistemi risonanti di incertezze di tipo geometrico, nel caso di un sistema periodico formato da una piastra con un fascio di risonatori (Henneberg J. et al., 2020); le incertezze riguardavano lo spessore della piastra, il raggio del risonatore e la sua lunghezza. I risultati hanno portato ad una quantificazione dello scostamento del band gap rispetto alla posizione del centro dell'intervallo che si ha quando i parametri sono incerti, in modo tale da definire dei massimi di tolleranza costruttiva per il sistema. Un altro studio sul tema riguarda l'analisi del comportamento di strutture periodiche finite formate da elementi identici lungo una direzione ma contenenti sottostrutture che differiscono leggermente per materiali e geometria (Mencik J.N. et al., 2016). I risultati dimostrano che introducendo delle variazioni controllate dei parametri secondo un determinato metodo, si riesce a ridurre la sensibilità della risposta del sistema nei confronti di altre variazioni incontrollate che potrebbero manifestarsi. Un lavoro che ha apportato risultati meritevoli di menzione è stato eseguito sulle microvariazioni materiche e geometriche di una travatura reticolare (Chatterjee T. et al., 2021), analizzando come le incertezze influenzino la dinamica della propagazione delle onde all'interno di reticoli periodici esagonali, ottenendo dei risultati utili per fissare le tolleranze di fabbricazione del sistema e per prevedere con maggiore accuratezza l'intervallo di banda all'interno del quale si ottiene l'attenuazione. Difatti, a causa della variabilità dei processi di produzione, si possono verificare deviazioni rilevanti rispetto alle previsioni di progetto.

Gli studi citati però riguardano incertezze su parametri e variabili all'interno della cella elementare, mantenendo saldo il principio di periodicità del sistema;

andrebbero indagati i risvolti di incertezze macroscopiche e difetti della cella unitaria di produzione o come conseguenza di danneggiamenti.

3.13. SINOSSI

Nel presente capitolo è stato trattato il problema del controllo delle vibrazioni delle condotte poggianti su una stesa periodica di risonatori. La periodicità geometrica della configurazione consente l'apertura di un intervallo di frequenze, il *band gap*, all'interno del quale le onde elastiche non si propagano. Si è visto come le caratteristiche dissipative e le ampiezze del *band gap* migliorino se nei classici supporti risonanti viene aggiunto il dispositivo inerter, studiando due configurazioni possibili dei supporti. I risultati adimensionali trovati con il Metodo della Matrice di Trasferimento hanno rilevato che la seconda tipologia di risonatori, in cui sono presenti l'inerter e due molle in parallelo, è più efficace rispetto alla tipologia A in cui le molle sono inserite in serie. Ovviamente, l'inserimento dell'inerter garantisce tutti i miglioramenti in termini di efficienza e compattezza discussi al capitolo 2 ed ha così permesso di ottenere il notevole vantaggio di poter dislocare i risonatori ad una distanza, l'uno dall'altro, dell'ordine dei metri.

I benefici citati rendono i due risonatori proposti convenienti nelle applicazioni e sono stati indagati diversi valori di frequenza di sintonizzazione, di inertanza e di rapporto di rigidità tra le molle del dispositivo. Se durante le prove numeriche si aumentano singolarmente o simultaneamente i valori dei parametri legati alla frequenza di sintonizzazione dei risonatori e all'inertanza, si ottengono risultati più soddisfacenti. A parità degli altri parametri del problema, se cresce il valore del rapporto di rigidità tra le due molle del risonatore il trend dei risultati rimane il medesimo ma è più vantaggioso il caso in cui il rapporto tra le rigidità è pari a 0.5 piuttosto che il caso in cui le molle hanno la medesima rigidità. È stata

indagata anche un'eventuale influenza della velocità del fluido transitante all'interno della condotta ma si è concluso che la velocità del fluido ha un'incidenza oltremodo marginale sull'apertura e sull'ampiezza del *band gap*, il che è considerato un risultato positivo. Difatti, ciò rende l'utilizzo dei risonatori più universale, oltre ad evitare il rischio di de-sintonizzazione del sistema qualora vi fossero inaspettati cambi di velocità, confermando la robustezza della progettazione.

Le prove sono state eseguite sia per la condotta infinita che finita, in cui si considera un carico viaggiante e si valuta la risposta in termini di trasmittanza piuttosto che di *band gap*: i risultati delle applicazioni sulla condotta finita hanno confermato quanto già evidenziato per la condotta infinita.

Infine, nel caso in cui la distanza a tra i risonatori sia sufficientemente piccola, è possibile utilizzare il Metodo dell'Omogeneizzazione per la risoluzione del sistema, grazie al quale si possono inoltre trovare in forma chiusa le espressioni della frequenza di apertura e chiusura del *band gap* e ricavare dei grafici di progetto molto utili per il dimensionamento delle componenti del sistema in relazione alla specifica esigenza: si può intervenire sulla frequenza di sintonizzazione, sull'inertanza e sull'ampiezza del *band gap* in base ai dati disponibili in *input* e/o alle esigenze progettuali.

Studi futuri riguarderanno in particolar modo l'analisi del comportamento del sistema in seguito all'introduzione di termini che tengono in considerazione le non linearità, come nel caso delle non linearità geometriche per l'interazione tra il fluido circolante in pressione ad una certa velocità e la condotta che, essendo un elemento snello, può deformarsi e manifestare fenomeni di instabilità. Inoltre è possibile condurre studi approfonditi sull'influenza delle incertezze di tipo geometrico, materico e sui parametri caratterizzanti gli isolatori oppure spaziale con perdita di periodicità puntuale del sistema a causa di danni che si possono verificare nel tempo oppure per difetti di costruzione.

4° CAPITOLO

IL CONTROLLO DELLE VIBRAZIONI DEI PONTI A TRAVATA CONTINUA

4.1. LA TECNICA DELL'ISOLAMENTO NEI PONTI

Lo sviluppo urbanistico, sociale e finanziario di un'area dipende strettamente dalla rete infrastrutturale presente sul territorio; all'interno della rete, le infrastrutture di trasporto hanno lo scopo di soddisfare la richiesta di accessibilità e mobilità di merci e cittadini e la loro corretta progettazione, realizzazione e manutenzione diventa un punto focale e un obiettivo dell'Ingegneria Civile. Un tema cruciale è quello della protezione delle infrastrutture da ponte che, se soggette ad eccitazioni esterne ed eventi sismici, possono danneggiarsi e ostacolare i soccorsi, cagionando pericoli diretti e indiretti per la sicurezza pubblica.

I ponti sono molto vulnerabili nei confronti dei terremoti in quanto il loro periodo fondamentale, generalmente compreso tra 0.2 e 1.2 secondi, è vicino al periodo proprio dei sismi più ricorrenti e pertanto la risposta strutturale sarà elevata (Kunde M.C., Jangid R.S., 2003), soprattutto nel caso di ponti con pile e campate di lunghezze contenute e pertanto caratterizzati da elevata rigidità.

Appare evidente come una delle soluzioni maggiormente impiegate con risultati soddisfacenti sia utilizzare l'isolamento per sconnettere l'impalcato dalle pile ed ottenere il grande vantaggio di spostare il periodo fondamentale della struttura, adesso isolata, verso valori più alti e pertanto lontani dal periodo proprio dell'eccitazione forzante, riuscendo al contempo ad aumentare la capacità di

dissipazione della struttura per ridurre l'entità delle accelerazioni che la sottostruttura trasmette alla sovrastruttura.

Le caratteristiche del sistema di isolamento sono ovviamente strettamente legate alla configurazione della struttura da ponte analizzata in termini di caratteristiche geometriche, plano-altimetriche e di tipologia costruttiva, con valutazioni distinte se si tratta del progetto di una nuova costruzione oppure dell'adeguamento di ponti esistenti; altri fattori riguardano la sismicità dell'area e le caratteristiche delle frequenze di vibrazione dei terremoti attesi.

Oltre a conoscere gli effetti del sistema di isolamento in termini di incremento del periodo e dello smorzamento, bisogna considerare gli isolatori hanno una certa rigidità verticale sotto carichi statici ma hanno una certa capacità deformativa orizzontale il che implica grandi spostamenti, ma posseggono anche la capacità di auto ricentrarsi se non vengono superati determinati limiti plastici.

Nei ponti esistenti, la sostituzione degli appoggi con gli isolatori è un procedimento relativamente semplice dal punto di vista tecnico ed è utile per ottenere il duplice vantaggio di proteggere l'infrastruttura dalle azioni dinamiche, grazie allo smorzamento isteretico fornito dagli isolatore, e di consentire comunque i piccoli spostamenti in esercizio dovuti alle variazioni termiche.

L'impiego del sistema di isolamento per la protezione sismica dei ponti è una tecnica di comprovata efficacia; Li X.M. (1989) ha analizzato la risposta di un ponte a tre campate, nel quale è stato applicato un sistema di isolamento costituito da isolatori e dissipatori evidenziando che il sistema di isolamento è più efficace nel caso in cui la struttura portante sia rigida e per un valore maggiore di spostamento consentito al dispositivo. Nello stesso anno, Ghobarah A. e Ali H.M si sono occupati della progettazione di ponti autostradali con l'obiettivo di trovare un equilibrio tra le forze di taglio che vengono trasmesse ai supporti e l'aver spostamenti tollerabili. Ovviamente, il comportamento tanto dei dispositivi quanto della struttura dipende da molteplici fattori: Mayes et al. (1992) si sono

occupati di rivisitare i concetti chiave delle norme americane AASHTO e hanno confrontato il comportamento dei dispositivi di isolamento per diversi valori di spostamento, mentre Mahin (1993) ha progettato il sistema di scorrimento dell'impalcato sulle pile considerando che gli indici della risposta sono funzione ad esempio del moto al suolo, delle caratteristiche dell'isolatore e di quelle della struttura, mostrando come non sia possibile fare una previsione univoca che garantisca sempre una certa convenienza nell'adozione del sistema di isolamento. Tuttavia, Mayes (1996) ha dimostrato come in generale l'isolamento sia sempre una soluzione vantaggiosa perché le forze non solo si riducono ma si ridistribuiscono, con conseguenti vantaggi anche di natura economica.

Vi sono però delle conseguenze da tenere in considerazione quando ci si avvale di un sistema di isolamento nei ponti: Jangid e Banerji (1995) hanno studiato la risposta di ponti soggetti a sollecitazioni in direzione longitudinale, con il risultato che si ottiene una notevole riduzione del taglio alla base delle pile, ma rimangono grandi gli spostamenti residui per problemi nel ricentraggio dei dispositivi. Analogamente, anche Tsopeles e Constantinou (1997) hanno verificato che le condizioni affinché il sistema di isolamento sia efficace riguardano la possibilità di manifestare grandi spostamenti, prescrivendo di attenzionare il problema del ricentraggio e della sostituzione dei dispositivi; allo stesso modo, anche Delis (1997) ha riscontrato una notevole riduzione delle forze nei ponti in acciaio isolati con dispositivi a scorrimento, sottolineando come debbano essere appositamente progettati dei giunti di dilatazione in grado di consentire grandi spostamenti orizzontali. Il problema dei giunti ed in generale del martellamento tra gli elementi che compongono la sovrastruttura è stato studiato anche da Jankowski (1998), con particolare riferimento alle conseguenze che le dimensioni dei giunti possono avere sull'aumento o la diminuzione delle forze sulle pile, alle quali dopo l'applicazione del sistema di isolamento è richiesto un incremento di duttilità, come individuato da Maragakis e Saiidi (1993).

Dalla necessità di risolvere le criticità che derivano dall'aumentare degli spostamenti del sistema isolato, nascono soluzioni che vedono l'isolamento in abbinamento con i dissipatori di vibrazioni e di energia, così come introdotto nel 2000 da Kim et al. che nei giunti hanno introdotto dei vincoli dissipativi costituiti da un elemento elastico e uno smorzatore in serie o in parallelo. Lo studio analitico ha mostrato come ne risultino ridotti sia gli spostamenti relativi che il martellamento nei giunti di dilatazione, senza aumentare la richiesta di duttilità nelle pile. Risultati in termini di riduzione degli spostamenti sono stati ottenuti anche da Parvin e Ma (2001), abbinando ai componenti elastici, che rappresentavano un sistema di isolamento multidirezionale, degli smorzatori a fluido non lineari per la dissipazione di energia.

Nel capitolo 1 è stato già trattato come abbinare smorzatori a massa accordata agli isolatori sia sicuramente una scelta vincente in termini di riduzione delle vibrazioni e delle forze trasmesse alla sovrastruttura, ma necessita sovente di ingenti masse, problematica per la quale è stato introdotto opportunamente il dispositivo inerter che, nello studio di seguito proposto, sarà utilizzato con l'isolamento sia per le pile soggette ad un sisma trasversale, che per l'impalcato sotto un'eccitazione longitudinale che causa criticità nei giunti.

4.2. PONTE A TRAVATA CONTINUA SOGGETTO A SISMA LONGITUDINALE: TMDI SU SPALLA

Quando un ponte a travata continua è soggetto all'azione di un sisma longitudinale, le sollecitazioni vengono assorbite dalle spalle e il movimento dell'impalcato, che scorre sugli appoggi o sugli isolatori in testa alle pile, provoca una situazione molto critica per i giunti di dilatazione alle estremità. I giunti sono sempre una delle componenti più delicate dell'infrastruttura da ponte, soggetti spesso a degradi che ne riducono la funzionalità; eccessivi spostamenti possono

causare rotture fragili dei giunti, assolutamente da evitare. Al fine di ridurre l'entità degli spostamenti longitudinali dell'impalcato, si propone l'inserimento in prossimità della spalla fissa di un dispositivo TMDI in abbinamento con il sistema di isolamento.

4.2.1. EQUAZIONI DEL MOTO DEL MODELLO

Il caso studio è il seguente: si considera un ponte a travata continua rettilineo a più campate, in cui le campate di estremità sono, come classicamente avviene nella tecnologia dei ponti a conci coniugati, più corte delle campate intermedie ed in particolare di metà lunghezza. Il ponte presenta un sistema di isolamento in testa a ciascuna pila, al fine di sconnettere la sovrastruttura dalla sottostruttura, e si immagina di introdurre in prossimità della spalla un dispositivo combinato TMDI, come è possibile vedere in Fig. 4.1:

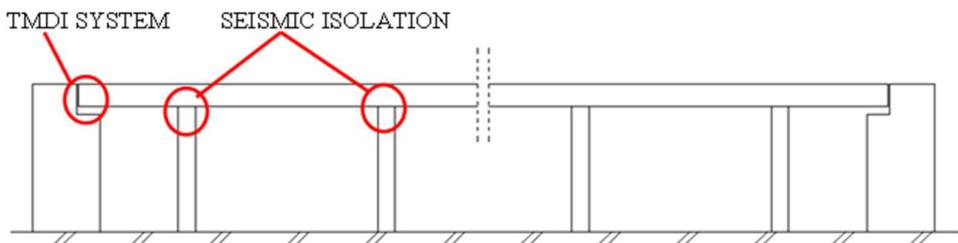


Fig. 4.1: Schematizzazione del ponte nel caso studio

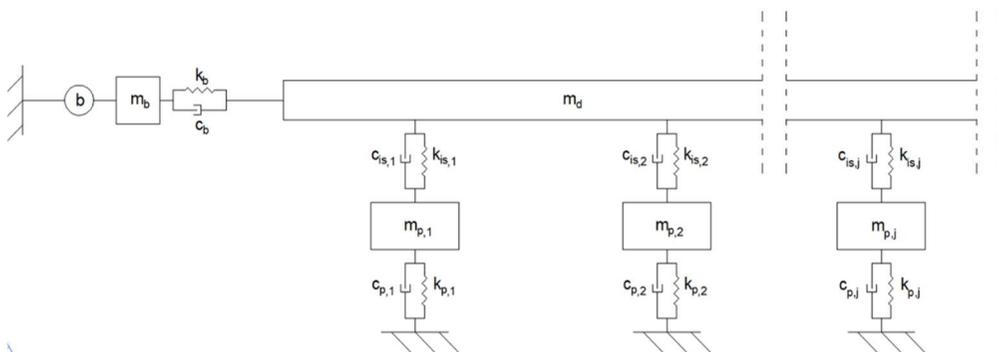


Fig. 4.2: Schematizzazione ponte in termini di masse, rigidità e coefficienti di smorzamento

L'impalcato ha una determinata massa m_d e poggia su un numero n_p di pile aventi ognuna una determinata massa $m_{p,j}$ e le proprie caratteristiche in termini di rigidezza $k_{p,j}$ e smorzamento $c_{p,j}$. Tra l'impalcato e la testa di ciascuna pila, si ha il sistema di isolamento rappresentato schematicamente dall'inserimento di una molla con rigidezza $k_{is,j}$ e di uno smorzatore con coefficiente di smorzamento $c_{is,j}$. L'impalcato è collegato ad un TMDI, a sua volta collegato al suolo ed avente massa fisica m_b , inerzia b , rigidezza e coefficiente di smorzamento rispettivamente k_b e c_b . La schematizzazione delle componenti è riportata in **Fig. 4.2**.

I gradi di libertà del problema sono in numero pari a $(n_p + 2)$ ovvero un grado di libertà per ciascuna pila ed in più quelli relativi all'impalcato ed al TMDI di estremità. Per descrivere la dinamica del problema sono necessarie un numero di equazioni pari a $(n_p + 2)$, che di seguito si riportano:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 1) \quad m_{p,j} \ddot{u}_{p,j} + (c_{p,j} + c_{is,j}) \dot{u}_{p,j} - c_{is,j} \dot{u}_d + (k_{p,j} + k_{is,j}) u_{p,j} - k_{is,j} u_d = -m_{p,j} \ddot{u}_g \\
 \vdots \\
 2) \quad m_d \ddot{u}_d - \sum_{j=1}^{n_p} (c_{is,j} \dot{u}_{p,j}) + \left(c_b + \sum_{j=1}^{n_p} c_{is,j} \right) \dot{u}_d - c_b \dot{u}_b - \sum_{j=1}^{n_p} (k_{is,j} u_{p,j}) + \\
 \quad + \left(k_b + \sum_{j=1}^{n_p} k_{is,j} \right) u_d - k_b u_b = -m_d \ddot{u}_g \\
 3) \quad (m_b + b) \ddot{u}_b - c_b \dot{u}_d + c_b \dot{u}_b - k_b u_d + k_b u_b = -m_b \ddot{u}_g
 \end{array} \right.$$

(4.1)

Naturalmente, il pedice j si riferisce alla j -esima pila.

Al fine di rendere la trattazione più generica, si vuole adimensionalizzare la formulazione dividendo ciascun termine per la massa dell'impalcato e introducendo determinate posizioni; ad esempio, per la pila si hanno, in termini di masse, rigidezze e smorzamento:

$$\begin{aligned}
 \frac{m_{p,j}}{m_d} &= \mu_{p,j} \\
 \frac{k_{p,j}}{m_d} &= \frac{k_{p,j}}{m_d} \frac{m_{p,j}}{m_{p,j}} = \mu_{p,j} \omega_{p,j}^2 \\
 \frac{c_{p,j}}{m_d} &= \frac{c_{p,j}}{m_d} \frac{m_{p,j}}{m_{p,j}} = \mu_{p,j} 2\zeta_p \omega_{p,j}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Per il dispositivo ad inerter si fanno le seguenti posizioni:

$$\begin{aligned}
 \frac{m_b}{m_d} &= \mu_b \quad \frac{b}{m_d} = \beta \quad \omega_b = \sqrt{\frac{k_b}{m_b + b}} \\
 \frac{k_b}{m_d} &= \frac{k_b}{m_d} \frac{m_b + b}{m_b + b} = (\mu_b + \beta) \omega_b^2 \\
 \frac{c_b}{m_d} &= \frac{c_b}{m_d} \frac{m_b + b}{m_b + b} = (\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Infine, per le quantità relative al sistema di isolamento:

$$\begin{aligned}
 C_{IS} &= \sum_{j=1}^n c_{is,j} \quad \rightarrow \quad \frac{C_{IS}}{m_d} = 2\zeta_d \omega_d \\
 c_{is,j} &= \beta_{is,j} C_{IS} \quad \rightarrow \quad \beta_{is,j} = \frac{c_{is,j}}{C_{IS}} \\
 \frac{c_{is,j}}{m_d} &= \frac{\beta_{is,j} C_{IS}}{m_d} = \beta_{is,j} 2\zeta_d \omega_d
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
K_{IS} &= \sum_{j=1}^n k_{is,j} \\
k_{is,j} &= \alpha_{is,j} K_{IS} \rightarrow \alpha_{is,j} = \frac{k_{is,j}}{K_{IS}} \\
\frac{k_{is,j}}{m_d} &= \frac{\alpha_{is,j} K_{IS}}{m_d} = \alpha_{is,j} \omega_d^2 \\
\omega_d &= \sqrt{\frac{K_{IS}}{m_d}}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Adimensionalizzando le equazioni della (4.1), si ottengono:

$$\left\{ \begin{aligned}
1) & \mu_{p,j} \ddot{u}_{p,j} + (\mu_{p,j} 2\zeta_p \omega_{p,j} + \beta_{is,j} 2\zeta_d \omega_d) \dot{u}_{p,j} - \beta_{is,j} 2\zeta_d \omega_d \dot{u}_d + \\
& + (\mu_{p,j} \omega_{p,j}^2 + \alpha_{is,j} \omega_{d,j}^2) u_{p,j} - \alpha_{is,j} \omega_d^2 u_d = -\mu_{p,j} \ddot{u}_g \\
2) & \ddot{u}_d - \sum_{j=1}^{np} (\beta_{is,j} 2\zeta_d \omega_d \dot{u}_{p,j}) + \left((\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b + \sum_{j=1}^{np} \beta_{is,j} 2\zeta_d \omega_d \right) \dot{u}_d + \\
& - (\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b \dot{u}_b - \sum_{j=1}^{np} (\alpha_{is,j} \omega_{p,j}^2 u_{p,j}) + \left((\mu_b + \beta) \omega_b^2 + \sum_{j=1}^{np} \alpha_{is,j} \omega_d^2 \right) u_d + \\
& - (\mu_b + \beta) \omega_b^2 u_b = -\ddot{u}_g \\
3) & (\mu_b + \beta) \ddot{u}_b - (\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b \dot{u}_d + (\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b \dot{u}_b - (\mu_b + \beta) \omega_b^2 u_d + \\
& + (\mu_b + \beta) \omega_b^2 u_b = -\mu_b \ddot{u}_g
\end{aligned} \right. \tag{4.6}$$

\ddot{u}_g è l'accelerazione al suolo dovuta al sisma, che nella dinamica viene trattato ragionevolmente come un fenomeno aleatorio o casuale essendo un evento che, sotto le stesse condizioni, può o meno accadere all'interno di un determinato spazio campione. In questo studio, si applicano i metodi stocastici per l'analisi della risposta del sistema, in quanto nella Dinamica delle Strutture è consuetudine

considerare aleatori tanto la forzante quanto la risposta. Al fine di comprendere il significato delle quantità utilizzate per la valutazione del comportamento della struttura, si riportano nell'Appendice in calce alcuni cenni della teoria dei processi aleatori.

Nella teoria dei filtri di Clough e Penzien, l'accelerazione sismica al suolo ha espressione:

$$\ddot{u}_g = -\omega_S^2 u_S - 2\zeta_S \omega_S \dot{u}_S + \omega_K^2 u_K + 2\zeta_K \omega_K \dot{u}_K \quad (4.7)$$

Al sistema (4.6) vanno aggiunte due equazioni:

$$\begin{aligned} 4) \ddot{u}_S + 2\zeta_S \omega_S \dot{u}_S + \omega_S^2 u_S - \omega_K^2 u_K - 2\zeta_K \omega_K \dot{u}_K &= 0 \\ 5) \ddot{u}_K + 2\zeta_K \omega_K \dot{u}_K + \omega_K^2 u_K &= -S_W \end{aligned} \quad (4.8)$$

in cui S_W è la densità spettrale di potenza del processo aleatorio bianco di input; le quantità presenti nelle equazioni dei filtri hanno significati e valori riportati in Appendice A.

Per semplicità e senza ledere la generalità, si consideri nel sistema (4.6) la presenza di una sola pila e aggiungendo le equazioni alla (4.8), si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l}
1) \mu_p \ddot{u}_p + (\mu_p 2\zeta_p \omega_p + 2\zeta_d \omega_d) \dot{u}_p - 2\zeta_d \omega_d \dot{u}_d + (\mu_p \omega_p^2 + \omega_d^2) u_p - \omega_d^2 u_d + \\
\quad - \mu_p \omega_s^2 u_s - \mu_p 2\zeta_s \omega_s \dot{u}_s + \mu_p \omega_k^2 u_k + \mu_p 2\zeta_k \omega_k \dot{u}_k = 0 \\
2) \ddot{u}_d - 2\zeta_d \omega_d \dot{u}_p + ((\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b + 2\zeta_d \omega_d) \dot{u}_d - (\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b \dot{u}_b + \\
\quad - \omega_d^2 u_p + ((\mu_b + \beta) \omega_b^2 + \omega_d^2) u_d - (\mu_b + \beta) \omega_b^2 u_b - \omega_s^2 u_s - 2\zeta_s \omega_s \dot{u}_s + \\
\quad + \omega_k^2 u_k + 2\zeta_k \omega_k \dot{u}_k = 0 \\
3) (\mu_b + \beta) \ddot{u}_b - (\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b \dot{u}_d + (\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b \dot{u}_b - (\mu_b + \beta) \omega_b^2 u_d + \\
\quad + (\mu_b + \beta) \omega_b^2 u_b - \mu_b \omega_s^2 u_s - \mu_b 2\zeta_s \omega_s \dot{u}_s + \mu_b \omega_k^2 u_k + \mu_b 2\zeta_k \omega_k \dot{u}_k = 0 \\
4) \ddot{u}_s + 2\zeta_s \omega_s \dot{u}_s + \omega_s^2 u_s - \omega_k^2 u_k - 2\zeta_k \omega_k \dot{u}_k = 0 \\
5) \ddot{u}_k + 2\zeta_k \omega_k \dot{u}_k + \omega_k^2 u_k = -S_W
\end{array} \right. \quad (4.9)$$

Si costruiscono le matrici delle masse, di dissipazione e delle rigidzze $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$ ed i vettori che raccolgono le accelerazioni, le velocità e gli spostamenti dei 5 gradi di libertà del sistema:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mu_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_b + \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{u}_p \\ \ddot{u}_d \\ \ddot{u}_b \\ \ddot{u}_s \\ \ddot{u}_k \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{u}}} \quad (4.10)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (\mu_p 2\zeta_p \omega_p + 2\zeta_d \omega_d) & -2\zeta_d \omega_d & 0 & -\mu_p 2\zeta_s \omega_s & \mu_p 2\zeta_k \omega_k \\ -2\zeta_d \omega_d & ((\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b + 2\zeta_d \omega_d) & -(\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b & -2\zeta_s \omega_s & 2\zeta_k \omega_k \\ 0 & -(\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b & (\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b & -\mu_b 2\zeta_s \omega_s & \mu_b 2\zeta_k \omega_k \\ 0 & 0 & 0 & 2\zeta_s \omega_s & -2\zeta_k \omega_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\zeta_k \omega_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{u}_p \\ \dot{u}_d \\ \dot{u}_b \\ \dot{u}_s \\ \dot{u}_k \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{u}}} \quad (4.11)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (\mu_p \omega_p^2 + \omega_d^2) & -\omega_d^2 & 0 & -\mu_p \omega_s^2 & \mu_p \omega_k^2 \\ -\omega_d^2 & ((\mu_b + \beta) \omega_b^2 + \omega_d^2) & -(\mu_b + \beta) \omega_b^2 & -\omega_s^2 & \omega_k^2 \\ 0 & -(\mu_b + \beta) \omega_b^2 & (\mu_b + \beta) \omega_b^2 & -\mu_b \omega_s^2 & \mu_b \omega_k^2 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_s^2 & -\omega_k^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_k^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_p \\ u_d \\ u_b \\ u_s \\ u_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} \quad (4.12)$$

Il vettore forzante avrà la densità spettrale di potenza del rumore bianco in corrispondenza dell'equazione del grado di libertà del secondo oscillatore del filtro:

$$[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -S_w]^T \quad (4.13)$$

È possibile ricorrere ad un altro modo per scrivere le equazioni di governo del sistema; nella seconda e nella terza equazione è possibile mettere in evidenza al secondo membro determinate quantità:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1_j) \mu_{p,j} \ddot{u}_{p,j} + (\mu_{p,j} 2\zeta_p \omega_{p,j} + \beta_{is,j} 2\zeta_d \omega_d) \dot{u}_{p,j} - \beta_{is,j} 2\zeta_d \omega_d \dot{u}_d + \\ \quad + (\mu_{p,j} \omega_{p,j}^2 + \alpha_{is,j} \omega_{d,j}^2) u_{p,j} - \alpha_{is,j} \omega_d^2 u_d = -\mu_{p,j} \ddot{u}_g \\ \\ 2) \ddot{u}_d - \underbrace{\sum_{j=1}^{np} (\beta_{is,j} 2\zeta_d \omega_d \dot{u}_{p,j})}_{\text{sono } np \text{ termini}} + \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{np} \beta_{is,j} 2\zeta_d \omega_d \right)}_{\text{è un solo termine}} \dot{u}_d - \underbrace{\sum_{j=1}^{np} (\alpha_{is,j} \omega_d^2 u_{p,j})}_{\text{sono } np \text{ termini}} + \\ \quad + \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{np} \alpha_{is,j} \omega_d^2 \right)}_{\text{è un solo termine}} u_d = -\ddot{u}_g - [(\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b \dot{u}_d - (\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b \dot{u}_b + \\ \quad + (\mu_b + \beta) \omega_b^2 u_d - (\mu_b + \beta) \omega_b^2 u_b] \\ \\ 3) (\mu_b + \beta) \ddot{u}_b - [(\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b \dot{u}_d - (\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b \dot{u}_b + \\ \quad + (\mu_b + \beta) \omega_b^2 u_d - (\mu_b + \beta) \omega_b^2 u_b] = -\mu_b \ddot{u}_g \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Se dalla terza equazione del sistema (4.6) si ricava:

$$\begin{aligned}
 (\mu_b + \beta)\ddot{u}_b + \mu_b \ddot{u}_g &= (\mu_b + \beta)2\zeta_b \omega_b \dot{u}_d - (\mu_b + \beta)2\zeta_b \omega_b \dot{u}_b + \\
 + (\mu_b + \beta)\omega_b^2 u_d - (\mu_b + \beta)\omega_b^2 u_b &
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

e la si sostituisce all'interno della seconda equazione, si ottiene:

$$\left\{ \begin{aligned}
 1_j) \mu_{p,j} \ddot{u}_{p,j} + (\mu_{p,j} 2\zeta_p \omega_{p,j} + \beta_{is,j} 2\zeta_d \omega_d) \dot{u}_{p,j} - \beta_{is,j} 2\zeta_d \omega_d \dot{u}_d + \\
 + (\mu_{p,j} \omega_{p,j}^2 + \alpha_{is,j} \omega_{d,j}^2) u_{p,j} - \alpha_{is,j} \omega_d^2 u_d &= -\mu_{p,j} \ddot{u}_g \\
 2) \ddot{u}_d + (\mu_b + \beta) \ddot{u}_b - \sum_{j=1}^{np} (\beta_{is,j} 2\zeta_d \omega_d \dot{u}_{p,j}) + \left(\sum_{j=1}^{np} \beta_{is,j} 2\zeta_d \omega_d \right) \dot{u}_d + \\
 \text{sono } np \text{ termini} & \qquad \qquad \qquad \text{è un solo termine} \\
 - \sum_{j=1}^{np} (\alpha_{is,j} \omega_{d,j}^2 u_{p,j}) + \left(\sum_{j=1}^{np} \alpha_{is,j} \omega_d^2 \right) u_d &= -(1 + \mu_b) \ddot{u}_g \\
 \text{sono } np \text{ termini} & \qquad \qquad \qquad \text{è un solo termine} \\
 3) (\mu_b + \beta) \ddot{u}_b - (\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b \dot{u}_d + (\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b \dot{u}_b + \\
 - (\mu_b + \beta) \omega_b^2 u_d + (\mu_b + \beta) \omega_b^2 u_b &= -\mu_b \ddot{u}_g
 \end{aligned} \right. \tag{4.16}$$

Aggiungendo le due equazioni del filtro e considerando un'unica pila, si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l}
1) \mu_p \ddot{u}_p + (\mu_p 2\zeta_p \omega_p + 2\zeta_d \omega_d) \dot{u}_p - 2\zeta_d \omega_d \dot{u}_d + (\mu_p \omega_p^2 + \omega_d^2) u_p + \\
\quad - \omega_d^2 u_d = -\mu_p \ddot{u}_g \\
2) \ddot{u}_d + (\mu_b + \beta) \ddot{u}_b - 2\zeta_d \omega_d \dot{u}_p + 2\zeta_d \omega_d \dot{u}_d - \omega_d^2 u_p + \omega_d^2 u_d = -(1 + \mu_b) \ddot{u}_g \\
3) (\mu_b + \beta) \ddot{u}_b - (\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b \dot{u}_d + (\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b \dot{u}_b + \\
\quad - (\mu_b + \beta) \omega_b^2 u_d + (\mu_b + \beta) \omega_b^2 u_b = -\mu_b \ddot{u}_g \\
4) \ddot{u}_S + 2\zeta_S \omega_S \dot{u}_S + \omega_S^2 u_S - \omega_K^2 u_K - 2\zeta_K \omega_K \dot{u}_K = 0 \\
5) \ddot{u}_K + 2\zeta_K \omega_K \dot{u}_K + \omega_K^2 u_K = -S_W
\end{array} \right. \quad (4.17)$$

Sostituendo all'accelerazione del sisma al suolo:

$$\left\{ \begin{array}{l}
1) \mu_p \ddot{u}_p + (\mu_p 2\zeta_p \omega_p + 2\zeta_d \omega_d) \dot{u}_p - 2\zeta_d \omega_d \dot{u}_d + (\mu_p \omega_p^2 + \omega_d^2) u_p + \\
\quad - \omega_d^2 u_d = -\mu_p \ddot{u}_g \\
2) \ddot{u}_d + (\mu_b + \beta) \ddot{u}_b - 2\zeta_d \omega_d \dot{u}_p + 2\zeta_d \omega_d \dot{u}_d - \omega_d^2 u_p + \omega_d^2 u_d + \\
\quad - (1 + \mu_b) \omega_S^2 u_S - (1 + \mu_b) 2\zeta_S \omega_S \dot{u}_S + (1 + \mu_b) \omega_K^2 u_K + \\
\quad + (1 + \mu_b) 2\zeta_K \omega_K \dot{u}_K = 0 \\
3) (\mu_b + \beta) \ddot{u}_b - (\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b \dot{u}_d + (\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b \dot{u}_b + \\
\quad - (\mu_b + \beta) \omega_b^2 u_d + (\mu_b + \beta) \omega_b^2 u_b - \mu_b \omega_S^2 u_S - \mu_b 2\zeta_S \omega_S \dot{u}_S + \\
\quad + \mu_b \omega_K^2 u_K + \mu_b 2\zeta_K \omega_K \dot{u}_K = 0 \\
4) \ddot{u}_S + 2\zeta_S \omega_S \dot{u}_S + \omega_S^2 u_S - \omega_K^2 u_K - 2\zeta_K \omega_K \dot{u}_K = 0 \\
5) \ddot{u}_K + 2\zeta_K \omega_K \dot{u}_K + \omega_K^2 u_K = -S_W
\end{array} \right. \quad (4.18)$$

A questo punto, si è scelto di valutare quale fosse l'effettivo miglioramento introdotto dall'inerter nel TMDI e pertanto, per scindere l'influenza della massa sintonizzata da quella del dispositivo inerter, si è posta pari a zero la massa accordata. Il dispositivo è pertanto un TDI. Le matrici, con $\mu_b = 0$, diventano:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mu_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{u}_p \\ \ddot{u}_d \\ \ddot{u}_b \\ \ddot{u}_S \\ \ddot{u}_K \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{u}}} \quad (4.19)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (\mu_p 2\zeta_p \omega_p + 2\zeta_d \omega_d) & -2\zeta_d \omega_d & 0 & -\mu_p 2\zeta_S \omega_S & \mu_p 2\zeta_K \omega_K \\ -2\zeta_d \omega_d & (2\zeta_d \omega_d) & 0 & -2\zeta_S \omega_S & 2\zeta_K \omega_K \\ 0 & -2\zeta_b \omega_b & 2\zeta_b \omega_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\zeta_S \omega_S & -2\zeta_K \omega_K \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\zeta_K \omega_K \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{u}_p \\ \dot{u}_d \\ \dot{u}_b \\ \dot{u}_S \\ \dot{u}_K \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{u}}} \quad (4.20)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (\mu_p \omega_p^2 + \omega_d^2) & -\omega_d^2 & 0 & -\mu_p \omega_S^2 & \mu_p \omega_K^2 \\ -\omega_d^2 & \omega_d^2 & 0 & -\omega_S^2 & \omega_K^2 \\ 0 & -\omega_b^2 & \omega_b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_S^2 & -\omega_K^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_K^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_p \\ u_d \\ u_b \\ u_S \\ u_K \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} \quad (4.21)$$

E' possibile, quindi, costruire le matrici per l'Analisi Dinamica in variabili di stato:

$$\mathbf{A}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

$$\mathbf{D}_N = -\mathbf{A}_N^{-1} \cdot \mathbf{B}_N \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\pi S_W \end{pmatrix}$$

Come indicato in Appendice, si risolve la seguente equazione di Lyapunov, ovvero risolvendo il sistema lineare seguente si ricava la matrice di covarianza della risposta:

$$\mathbf{D}_N \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{D}_N^T = \mathbf{X} \quad \text{LYAPUNOV EQUATION} \quad (4.23)$$

Si trova la soluzione in termini di varianza dei tre spostamenti associati ai tre principali gradi di libertà, ovvero gli spostamenti di pila, impalcato e inerter:

$$\sigma_1 = \sigma_{up} \quad \sigma_2 = \sigma_{ud} \quad \sigma_3 = \sigma_{ub} \quad (4.24)$$

4.2.2. INDAGINI NUMERICHE

Al fine di testare la bontà della soluzione proposta, sono state condotte diverse prove numeriche; innanzitutto, si considera di osservare il comportamento di un ponte con impalcato continuo a cassone prefabbricato e di avere una campata di estremità, in corrispondenza della spalla, lunga la metà rispetto alle campate centrali. Si studia un problema simmetrico con una sola pila (**Fig. 4.3**). Si considerano 4 diversi casi ovvero diverse altezze della pila: 20 m, 40 m, 60 m e 80 m. Le sezioni assunte per pile e impalcato sono riportate in **Fig. 4.5**. Per

ricavare le masse e le frequenze dell'impalcato e delle pile, sono stati realizzati modelli tridimensionali sul Software SAP2000 (Fig. 4.4).

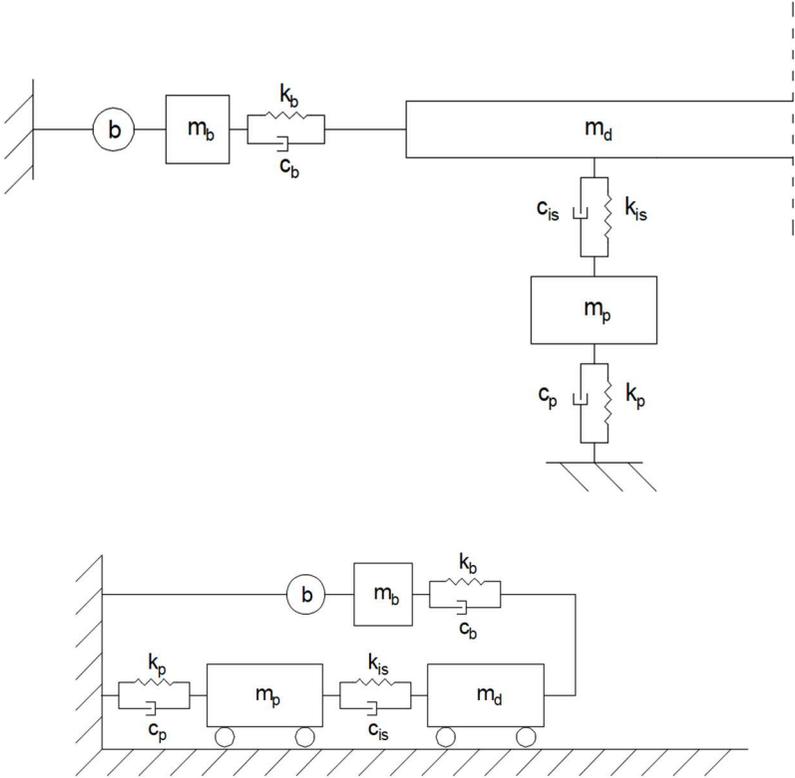


Fig. 4.3: Schematizzazione caso studio simmetrico con campata di estremità, semi campata centrale e pila

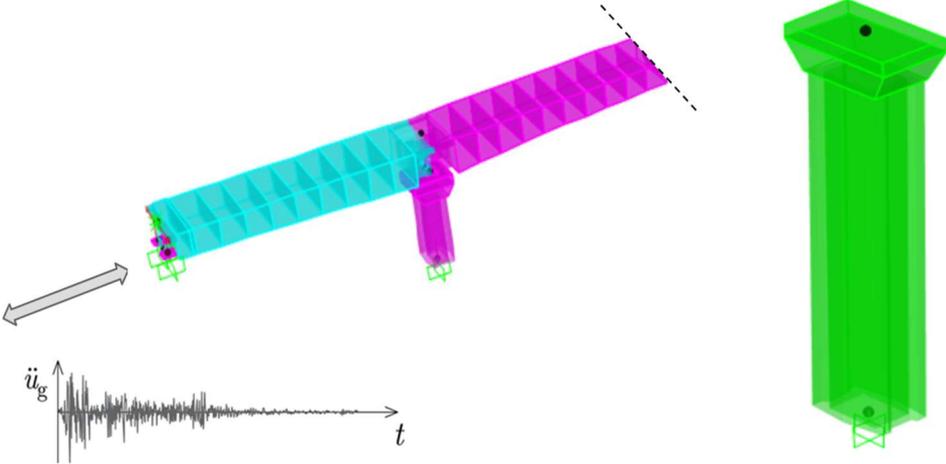


Fig. 4.4: Modello del caso studio realizzato con il Software SAP2000 e ingrandimento pila

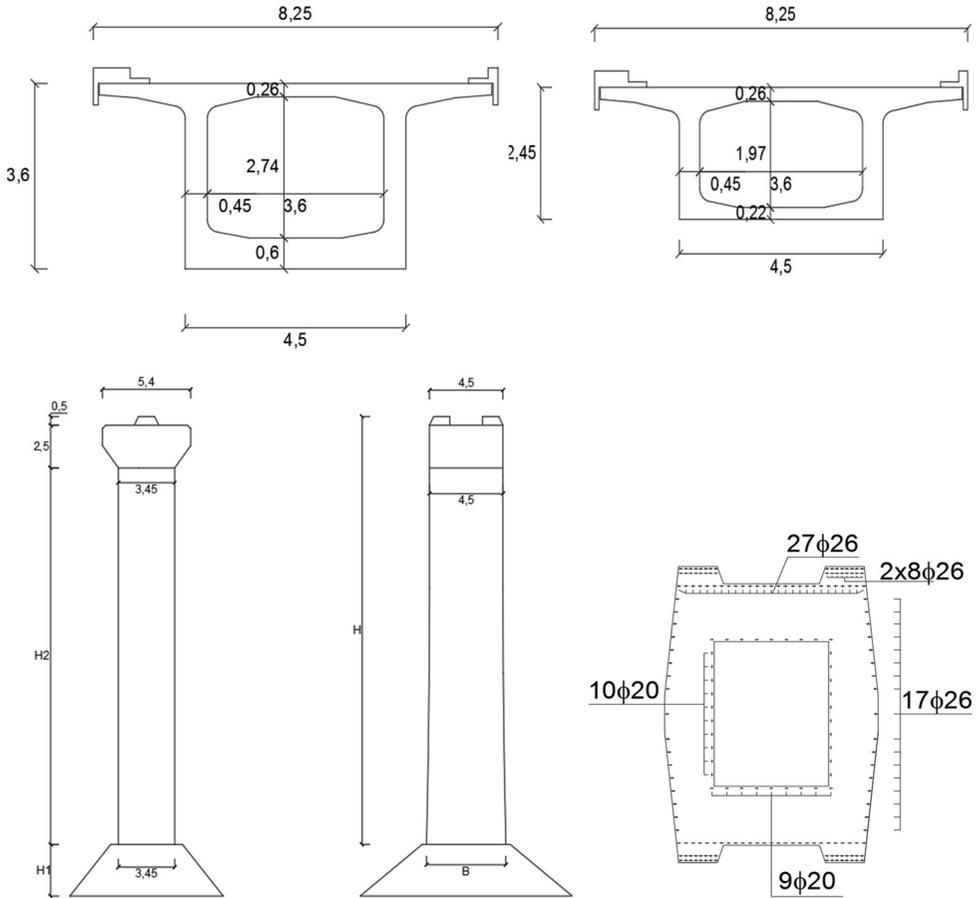


Fig. 4.5: Sezioni pile e impalcato

PIER'S CHARACTERISTICS				
H	20 m	40 m	60 m	80 m
Mass	380 ton	550 ton	820 ton	1270 ton
frequency	24 1/s	8 1/s	5 1/s	4 1/s

DECK CHARACTERISTICS	
Mass	1270 ton

Fig. 4.6: Altezze, masse e frequenze delle pile; massa dell'impalcato

Per le equazioni dei filtri di Clough e Penzien, si sceglie come terremoto di riferimento il sisma di El Centro, al quale corrispondono i seguenti valori dei parametri di filtro:

$$\begin{aligned}
\omega_K &= 19 & \omega_S &= 2 \\
\zeta_K &= 0.65 & \zeta_S &= 0.6 \\
S_W &= 0.0029
\end{aligned}
\tag{4.25}$$

Si suddivide la procedura di analisi numerica in diversi step.

4.2.2.1. STEP 1: calcolo del ponte isolato

Il primo step consiste nel calcolare la risposta della struttura semplicemente isolata, ovvero nella quale si introduce un classico sistema di isolamento tra la pila e l'impalcato. La scelta di calcolare la risposta del ponte nel caso standard serve sia per valutare tramite confronto la convenienza della successiva introduzione dell'inertor rispetto alle soluzioni tradizionali, sia a fissare una procedura di ottimizzazione che consenta di ottenere i vantaggi del sistema di isolamento contestualmente ai miglioramenti apportati dall'inertor, come si vedrà.

Per valutare la struttura solo isolata, il modello si semplifica poiché si hanno solamente due gradi di libertà: lo spostamento della pila e lo spostamento dell'impalcato. Le equazioni e le matrici diventano:

$$\left\{ \begin{aligned}
1) & \mu_p \ddot{u}_p + (\mu_p 2\zeta_p \omega_p + 2\zeta_d \omega_d) \dot{u}_p - 2\zeta_d \omega_d \dot{u}_d + (\mu_p \omega_p^2 + \omega_d^2) u_p + \\
& - \omega_d^2 u_d - \mu_p \omega_s^2 u_s - \mu_p 2\zeta_s \omega_s \dot{u}_s + \mu_p \omega_K^2 u_K + \mu_p 2\zeta_K \omega_K \dot{u}_K = 0 \\
2) & \ddot{u}_d - 2\zeta_d \omega_d \dot{u}_p + 2\zeta_d \omega_d \dot{u}_d - \omega_d^2 u_p + \omega_d^2 u_d - \omega_s^2 u_s - 2\zeta_s \omega_s \dot{u}_s + \\
& + \omega_K^2 u_K + 2\zeta_K \omega_K \dot{u}_K = 0 \\
3) & \ddot{u}_s + 2\zeta_s \omega_s \dot{u}_s + \omega_s^2 u_s - \omega_K^2 u_K - 2\zeta_K \omega_K \dot{u}_K = 0 \\
4) & \ddot{u}_K + 2\zeta_K \omega_K \dot{u}_K + \omega_K^2 u_K = -S_W
\end{aligned} \right.
\tag{4.26}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mu_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} (\mu_p \omega_p^2 + \omega_d^2) & -\omega_d^2 & -\mu_p \omega_s^2 & \mu_p \omega_k^2 \\ -\omega_d^2 & \omega_d^2 & -\omega_s^2 & \omega_k^2 \\ 0 & 0 & \omega_s^2 & -\omega_k^2 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_k^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \quad (4.27)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (\mu_p 2\zeta_p \omega_p + 2\zeta_d \omega_d) & -2\zeta_d \omega_d & -\mu_p 2\zeta_s \omega_s & \mu_p 2\zeta_k \omega_k \\ -2\zeta_d \omega_d & 2\zeta_d \omega_d & -2\zeta_s \omega_s & 2\zeta_k \omega_k \\ 0 & 0 & 2\zeta_s \omega_s & -2\zeta_k \omega_k \\ 0 & 0 & 0 & 2\zeta_k \omega_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -S_W \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Si riportano, in forma tabellare, i dati utilizzati per i quattro distinti casi, al variare dell'altezza della pila:

PIER H=20 m		
m_d	1270	ton
m_p	380	ton
ζ_p	0.05	
ω_p	24	Hz

PIER H=40 m		
m_d	1270	ton
m_p	550	ton
ζ_p	0.05	
ω_p	8	Hz

PIER H=60 m		
m_d	1270	ton
m_p	820	ton
ζ_p	0.05	
ω_p	5	Hz

PIER H=80 m		
m_d	1270	ton
m_p	1270	ton
ζ_p	0.05	
ω_p	4	Hz

Per ciascuna pila, le prove sono state condotte considerando variabile la frequenza dell'isolamento ω_d e per tre diversi valori di smorzamento ζ_d :

$$\omega_d = \text{var} \quad \zeta_d = 0.10 \quad \zeta_d = 0.15 \quad \zeta_d = 0.20 \quad (4.29)$$

Si ottengono risultati in termini di varianza dello spostamento dell'impalcato e della pila; pertanto, si ricavano gli andamenti della deviazione standard nei due casi, come riportato in **Fig. 4.7**.

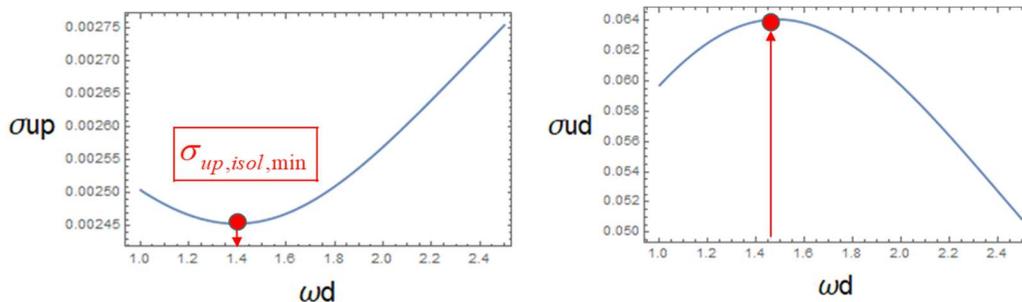


Fig. 4.7: Andamento deviazione standard dello spostamento di pila e impalcato, al variare della frequenza del sistema di isolamento

Come è possibile vedere in figura, in accordo con la consolidata teoria dell'isolamento, l'aver inserito gli isolatori tra pile e impalcato permette di proteggere le pile diminuendo lo spostamento in testa, il che si traduce in sollecitazioni minori alla base. Di contro, come avviene in qualsiasi BIS, aumentano gli spostamenti per un valore di frequenza del sistema per il quale si minimizza la deviazione standard dello spostamento della pila. Si adotta la seguente strategia: si procede ottimizzando la deviazione standard della pila, con un valore di σ_{up} minimo per una determinata frequenza ω_d . Per lo stesso valore di frequenza si vede come la deviazione standard dello spostamento dell'impalcato acquisisca un valore rilevante σ_{ud} . Si riportano, per tutti i casi studiati, i valori delle deviazioni standard calcolate ottimizzando lo spostamento della pila con il valore minimo di σ_{up} e i corrispondenti valori di ω_d e σ_{ud} , nel caso solo isolato.

PIER 20 m								
BIS ζ_d 0.1			BIS ζ_d 0.15			BIS ζ_d 0.2		
$\sigma_{upisol,min}$	0.002454	m	$\sigma_{upisol,min}$	0.00227	m	$\sigma_{upisol,min}$	0.002125	m
$\omega_{d_{upisol,min}}$	1.39	Hz	$\omega_{d_{upisol,min}}$	1.63	Hz	$\omega_{d_{upisol,min}}$	1.79	Hz
σ_{udisol}	0.064425	m	σ_{udisol}	0.05156	m	σ_{udisol}	0.042555	m

PIER 40 m								
BIS ζ_d 0.1			BIS ζ_d 0.15			BIS ζ_d 0.2		
$\sigma_{upisol,min}$	0.011017	m	$\sigma_{upisol,min}$	0.009818	m	$\sigma_{upisol,min}$	0.009074	m
$\omega_{d_{upisol,min}}$	1.42	Hz	$\omega_{d_{upisol,min}}$	1.51	Hz	$\omega_{d_{upisol,min}}$	1.55	Hz
σ_{udisol}	0.069138	m	σ_{udisol}	0.056879	m	σ_{udisol}	0.049019	m

PIER 60 m								
BIS ζd 0.1			BIS ζd 0.15			BIS ζd 0.2		
$\sigma_{upisol,min}$	0.018657	m	$\sigma_{upisol,min}$	0.016552	m	$\sigma_{upisol,min}$	0.015393	m
$\omega d_{\sigma upisol,min}$	1.47	Hz	$\omega d_{\sigma upisol,min}$	1.53	Hz	$\omega d_{\sigma upisol,min}$	1.54	Hz
σ_{udisol}	0.075574	m	σ_{udisol}	0.062852	m	σ_{udisol}	0.062543	m

PIER 80 m								
BIS ζd 0.1			BIS ζd 0.15			BIS ζd 0.2		
$\sigma_{upisol,min}$	0.024354	m	$\sigma_{upisol,min}$	0.021667	m	$\sigma_{upisol,min}$	0.020292	m
$\omega d_{\sigma upisol,min}$	1.64	Hz	$\omega d_{\sigma upisol,min}$	1.69	Hz	$\omega d_{\sigma upisol,min}$	1.69	Hz
σ_{udisol}	0.083341	m	σ_{udisol}	0.069335	m	σ_{udisol}	0.060327	m

Si riporta in **Fig. 4.8** ad esempio per la pila da 80 m il confronto tra l'andamento delle varianze dello spostamento dell'impalcato e dello spostamento della pila: è chiaro come la varianza dello spostamento della pila abbia valori inferiori e soprattutto abbia un andamento in cui è ben visibile un minimo, al quale corrisponde la frequenza ω_d scelta per ottimizzare il sistema; al contrario, l'andamento della varianza dello spostamento dell'impalcato assume valori maggiori e con concavità opposta, con un massimo nell'intorno della frequenza scelta per l'ottimizzazione.

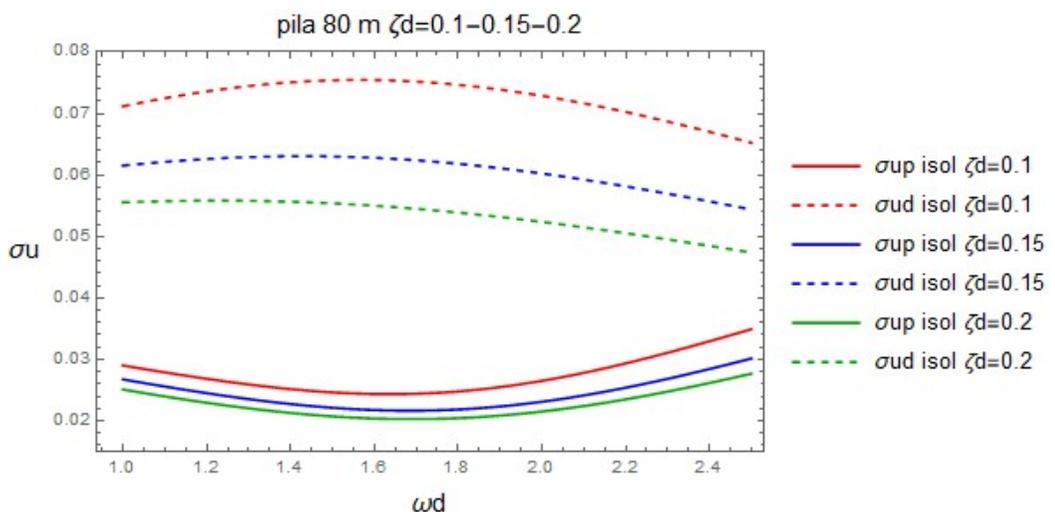


Fig. 4.8: Andamento delle varianze degli spostamenti di pila ed impalcato nel caso solo isolato per diversi valori dello smorzamento

Si può concludere che, con il tradizionale sistema di isolamento si riesce a proteggere la pila con ottimi risultati, ma a scapito della situazione dell'impalcato. È per questo motivo che si vuole inserire sulla spalla il TDI operando come segue.

4.2.2.2. STEP 2: calcolo del ponte con isolamento + TDI sulla spalla

Lo step successivo consiste nel calcolare la deviazione standard per gli spostamenti di pila, impalcato ed inerter. Si utilizzano le matrici e le equazioni ricavate al paragrafo 4.2.1.

Rispetto ai dati numerici utilizzati come input nello step 1, vi saranno sempre tre valori di smorzamento per l'isolamento e la frequenza dell'isolamento variabile, ma in questo caso si aggiungono i dati relativi ai parametri dell'inerter e la variabilità della frequenza del TDI.

$$\omega_d, \omega_b = \text{var} \quad \zeta_d = 0.10 \quad \zeta_d = 0.15 \quad \zeta_d = 0.20 \quad (4.30)$$

Inerter device		
m_b	0	ton
β	0.2	
ζ_b	0.2	
ω_b		

Si noti come la massa accordata sia posta uguale a zero.

In questo caso, i risultati delle deviazioni standard non saranno delle curve ma delle superfici: σ_{up} e σ_{ud} variano sia con ω_d che con ω_b (**Fig. 4.9**).

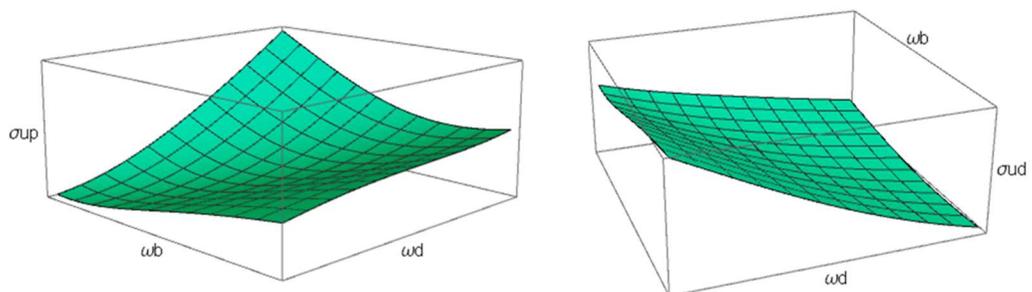


Fig. 4.9: Superfici dei valori delle deviazioni standard al variare delle frequenze del sistema di isolamento e del TDI

Si prevede di operare nel seguente modo: si vuole mantenere per la deviazione standard lo stesso valore raggiunto grazie al solo isolamento. Fissato il valore di $\sigma_{up} = \sigma_{up,isol,min}$, in questa rappresentazione si avrà una superficie piana che interseca la superficie della deviazione standard in una serie di punti cui corrispondono coppie di frequenze (ω_b, ω_d) . Le stesse coppie di frequenze individuano una serie di punti, uniti da una curva nel 3Dplot della deviazione standard dello spostamento dell'impalcato; si sceglie allora la coppia (ω_b, ω_d) che fornisce il minimo valore della σ_{ud} , con il vantaggio di aver mantenuto la stessa convenienza sulla σ_{up} che si era ottenuta con l'isolamento tradizionale.

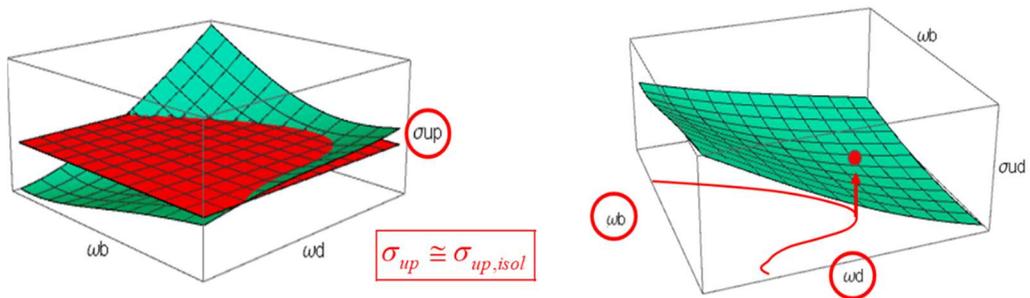


Fig. 4.10: individuazione del valore di deviazione standard per lo spostamento di impalcato minimo, mantenendo fisso il valore della deviazione standard dello spostamento della pila

La curva che unisce tutte le coppie di frequenze (ω_b, ω_d) , in rosso, si può visualizzare anche in **Fig. 4.11** in cui sono presenti anche tutte le curve relative ai valori della varianza dello spostamento dell'impalcato rispetto al suolo ed è possibile apprezzare come venga scelta la coppia di valori che, sulla curva rossa, interseca la curva che fornisce il minimo valore della σ_{ud} .

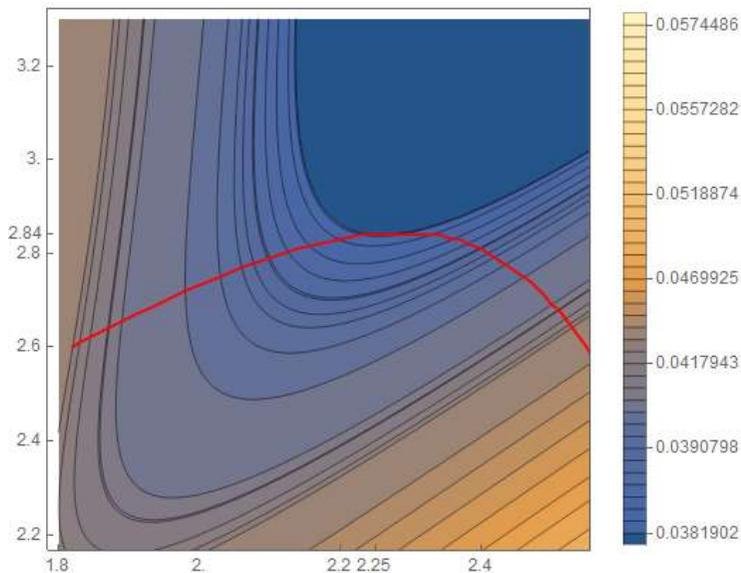


Fig. 4.11: Intersezione tra la curva che unisce le coppie di frequenze e le curve che rappresentano i valori della varianza dello spostamento dell'impalcato

4.2.2.3. **STEP 3: confronto tra i risultati e commenti**

Si riportano, in forma tabellare, i confronti tra i valori delle deviazioni standard tra il caso in cui si ha il solo isolamento (step 1) ed il caso in cui venga aggiunto sulla spalla un TDI (step 2); i risultati riguardano i quattro casi con pile di diverse altezze, dai 20 agli 80 m, e per tre diversi valori dello smorzamento scelto per il sistema di isolamento.

I valori della deviazione standard per lo spostamento della pila rimangono pressoché invariati, mentre si ha una notevole riduzione in percentuale nella deviazione standard dello spostamento dell'impalcato: l'obiettivo perseguito con il sistema proposto è stato raggiunto, il ponte risulta protetto dalle azioni longitudinali che, soprattutto nel caso di impalcato continuo, costituiscono un grande fattore di rischio per i giunti di dilatazione alle estremità e per il martellamento tra gli elementi strutturali. La soluzione proposta non incrementa lo stress sulle pile, che si tradurrebbe in un aumento del taglio alla base, e si configura come un intervento aggiuntivo all'isolamento classico interposto tra

pile ed impalcato, collocato sulla spalla per collegare il dispositivo inerter a terra. Si ricorda che, nell'applicazione riportata, la massa accordata del TMDI è stata annullata, ma valori di m_b diversi da zero aumentano l'efficacia del dispositivo.

Da una prima analisi critica dei risultati, partendo dal valore più basso utilizzato per lo smorzamento del sistema di isolamento $\zeta_d = 0.1$, è già possibile vedere risultati importanti in termini di riduzione della varianza dello spostamento dell'impalcato rispetto al caso in cui si ha il mero isolamento; in particolare, la pila in cui il sistema risulta essere più efficace è alta 20 m e presenta una riduzione quasi del 70%. Per le altre altezze della pila, si passa ad un -44% per la pila da 40 m e ad una riduzione di poco inferiore al 40% nel caso di pile alte 60-80 m, il che si configura in ogni caso come un ottimo risultato soprattutto alla luce del fatto che per le pile alte si sta abbattendo un valore già di per sé più alto di spostamento. In generale, per le pile da 20 m il valore della riduzione si mantiene ben al di sopra del 50%, per la pila da 40m si attesta tra il 30% ed il 45%, mentre per le due pile più alte rimane mediamente dell'ordine del 30%.

È importante notare tra i tre diversi casi in cui varia lo smorzamento ζ_d del sistema di isolamento che, al contrario di come si potrebbe pensare, aumentare lo smorzamento dell'isolamento non aiuta l'efficacia del sistema combinato, che garantisce prestazioni migliori per valori di smorzamento pari a 0.1 rispetto agli altri casi in cui è pari a 0.15 o 0.2; in particolare, dai risultati ottenuti è possibile notare come nel caso di $\zeta_d = 0.1$ la riduzione percentuale si muove nel range (38 – 65)%, per $\zeta_d = 0.15$ sarà compresa tra i valori (29.4 – 61)% mentre per $\zeta_d = 0.2$ rimane all'interno dell'intervallo (23.7 – 55.2)%. Si tratta, però, di riduzioni percentuali in termini assoluti: nel caso di smorzamenti maggiori, pur essendo inferiore la riduzione percentuale, si parte da varianze più piccole e si arriva a valori che sono in ogni caso inferiori.

PIER 20 m								
BIS ζd 0.1			BIS ζd 0.15			BIS ζd 0.2		
$\sigma_{\text{upisol,min}}$	0.002454	m	$\sigma_{\text{upisol,min}}$	0.00227	m	$\sigma_{\text{upisol,min}}$	0.002125	m
$\omega d_{\text{supisol,min}}$	1.39	Hz	$\omega d_{\text{supisol,min}}$	1.63	Hz	$\omega d_{\text{supisol,min}}$	1.79	Hz
σ_{udisol}	0.064425	m	σ_{udisol}	0.0515602	m	σ_{udisol}	0.042555	m

PIER 20 m								
BIS + TDI ζd 0.1			BIS + TDI ζd 0.15			BIS + TDI ζd 0.2		
sup	0.002454	m	sup	0.0022691	m	sup	0.002125	m
σ _{ud,min}	0.02281	m	σ _{ud,min}	0.0200924	m	σ _{ud,min}	0.019075	m
ωd	3.75	1/sec	ωd	3.82	1/sec	ωd	3.65	1/sec
ωb	3.15	1/sec	ωb	3.19	1/sec	ωb	3.07	1/sec

σ_{ud,min} **-64.59%**

σ_{ud,min} **-61.03%**

σ_{ud,min} **-55.18%**

PIER 40 m								
BIS ζd 0.1			BIS ζd 0.15			BIS ζd 0.2		
$\sigma_{\text{upisol,min}}$	0.011017	m	$\sigma_{\text{upisol,min}}$	0.0098178	m	$\sigma_{\text{upisol,min}}$	0.009074	m
$\omega d_{\text{supisol,min}}$	1.42	Hz	$\omega d_{\text{supisol,min}}$	1.51	Hz	$\omega d_{\text{supisol,min}}$	1.55	Hz
σ_{udisol}	0.069138	m	σ_{udisol}	0.0568786	m	σ_{udisol}	0.049019	m

PIER 40 m								
BIS + TDI ζd 0.1			BIS + TDI ζd 0.15			BIS + TDI ζd 0.2		
sup	0.011007	m	sup	0.0098169	m	sup	0.009073	m
σ _{ud,min}	0.03819	m	σ _{ud,min}	0.0358816	m	σ _{ud,min}	0.033707	m
ωd	2.84	1/sec	ωd	2.62	1/sec	ωd	2.43	1/sec
ωb	2.25	1/sec	ωb	2.18	1/sec	ωb	2.1	1/sec

σ_{ud,min} **-44.76%**

σ_{ud,min} **-36.92%**

σ_{ud,min} **-31.24%**

PIER 60 m								
BIS ζd 0.1			BIS ζd 0.15			BIS ζd 0.2		
$\sigma_{\text{upisol,min}}$	0.018657	m	$\sigma_{\text{upisol,min}}$	0.016552	m	$\sigma_{\text{upisol,min}}$	0.015393	m
$\omega d_{\text{supisol,min}}$	1.47	Hz	$\omega d_{\text{supisol,min}}$	1.53	Hz	$\omega d_{\text{supisol,min}}$	1.54	Hz
σ_{udisol}	0.075574	m	σ_{udisol}	0.0628522	m	σ_{udisol}	0.062543	m

PIER 60 m								
BIS + TDI ζd 0.1			BIS + TDI ζd 0.15			BIS + TDI ζd 0.2		
sup	0.01865	m	sup	0.016548	m	sup	0.015392	m
σ _{ud,min}	0.046856	m	σ _{ud,min}	0.0440259	m	σ _{ud,min}	0.041217	m
ωd	2.73	1/sec	ωd	2.47	1/sec	ωd	2.28	1/sec
ωb	2.05	1/sec	ωb	1.97	1/sec	ωb	1.97	1/sec

σ_{ud,min} **-38.00%**

σ_{ud,min} **-29.95%**

σ_{ud,min} **-34.10%**

PIER 80 m								
BIS ζ_d 0.1			BIS ζ_d 0.15			BIS ζ_d 0.2		
$\sigma_{upisol,min}$	0.024354	m	$\sigma_{upisol,min}$	0.021667	m	$\sigma_{upisol,min}$	0.020292	m
$\omega d_{\sigma upisol,min}$	1.64	Hz	$\omega d_{\sigma upisol,min}$	1.69	Hz	$\omega d_{\sigma upisol,min}$	1.69	Hz
σ_{udisol}	0.083341	m	σ_{udisol}	0.0693347	m	σ_{udisol}	0.060327	m

PIER 80 m								
BIS + TDI ζ_d 0.1			BIS + TDI ζ_d 0.15			BIS + TDI ζ_d 0.2		
σ_{up}	0.024351	m	σ_{up}	0.0216565	m	σ_{up}	0.020282	m
$\sigma_{ud,min}$	0.051583	m	$\sigma_{ud,min}$	0.0489261	m	$\sigma_{ud,min}$	0.045999	m
ωd	2.98	1/sec	ωd	2.66	1/sec	ωd	2.44	1/sec
ωb	2.1	1/sec	ωb	2.01	1/sec	ωb	1.96	1/sec

$\sigma_{ud,min}$	-38.11%
-------------------	----------------

$\sigma_{ud,min}$	-29.43%
-------------------	----------------

$\sigma_{ud,min}$	-23.75%
-------------------	----------------

Inoltre, si pone l'attenzione su ciò che accade alla frequenza del sistema di isolamento tra il caso in cui esso sia installato da solo ed il caso in cui venga combinato con il TDI: quando il sistema di isolamento lavora da solo, è più flessibile e presenta valori della frequenza ω_d più bassi rispetto ai valori ottimi nel caso di sistema combinato (**Fig. 4.12**). Questa differenza tra il valore di ω_d tra il caso isolato ed il caso combinato è tanto maggiore quanto è più bassa la pila: in particolare, per la pila da 20 m la frequenza finale ottimizzata è più di due volte e mezzo la frequenza del caso solo isolato, per la pila da 40 m è il doppio, mentre per le pile da 60 m e 80 m è circa 1.8 volte.

Infine, si veda come nel sistema combinato la frequenza del TDI sia sempre, in tutti i 12 casi analizzati al variare dello smorzamento e dell'altezza delle pile, inferiore rispetto alla frequenza dell'isolamento abbinato (**Fig. 4.13**); in particolare, nel caso in cui lo smorzamento è $\zeta_d = 0.1$ o $\zeta_d = 0.15$, il distacco tra le due frequenze è maggiore al crescere dell'altezza della pila, con differenza percentuale compresa tra il 25% ed il 45% circa; questa regola non viene del tutto seguita nel caso di $\zeta_d = 0.2$, in cui le frequenze ω_d e ω_b sono un po' più vicine.

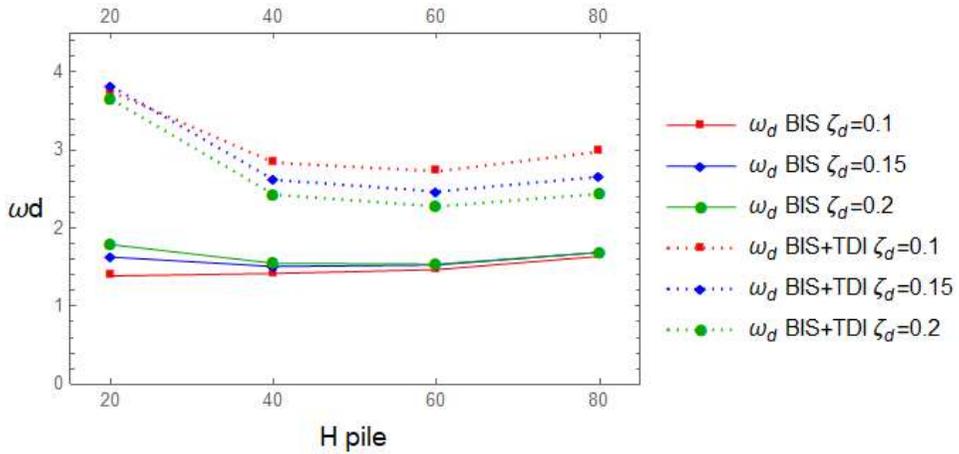


Fig. 4.12: Andamento della frequenza di isolamento per pile di diversa altezza (20, 40, 60, 80 m), con diversi valori di smorzamento (0.1, 0.15, 0.2), nel caso di sistema solamente isolato (BIS) oppure con aggiunta di TDI

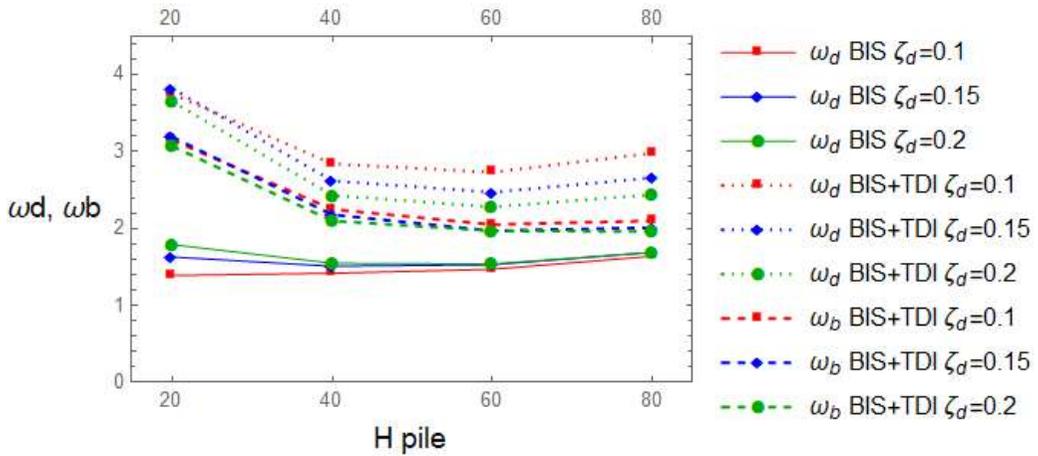


Fig. 4.13: Andamento della frequenza di isolamento e della frequenza del TDI per pile di diversa altezza (20, 40, 60, 80 m), con diversi valori di smorzamento (0.1, 0.15, 0.2), nel caso di sistema solamente isolato (BIS) oppure con aggiunta di TDI

4.2.2.4. PILA 40 m: analisi dinamica deterministica

In questo paragrafo si vuole calcolare la risposta sia nel caso solo isolato che con l'inserimento del TDI in termini di spostamento della pila da 40 m per $\zeta_d = 0.1$ con i metodi deterministici dell'analisi dinamica, in particolare utilizzando l'analisi modale in variabili di stato e generando un certo numero n di accelerogrammi spettro-compatibili con la Simulazione Monte Carlo, calcolando la risposta con metodi di integrazione al passo nello spazio nodale. Si opera nel seguente modo: si utilizzano le matrici delle masse \mathbf{M} , delle rigidezze \mathbf{K} e di dissipazione \mathbf{C} calcolate nei paragrafi precedenti, con le quali si costruiscono le matrici \mathbf{A}_N , \mathbf{B}_N e \mathbf{D}_N nello spazio nodale in variabili di stato. Per costruire le matrici sono stati utilizzati i valori delle frequenze ottimi giù trovati, sia nel caso in cui sia presente il solo sistema di isolamento sia nel caso in cui venga aggiunto il dispositivo TDI e avendo mantenuto la stessa varianza ottimizzata per lo spostamento della pila e scelto il minimo valore possibile per la varianza dello spostamento dell'impalcato.

I valori utilizzati pertanto sono:

PIER H=40 m					
BIS ζ_d 0.1			BIS + TDI ζ_d 0.1		
m_d	1270	ton	m_d	1270	ton
m_p	550	ton	m_p	550	ton
ζ_p	0.05		ζ_p	0.05	
ω_p	8	Hz	ω_p	8	Hz
ω_d	1.42	Hz	ω_d	3.75	Hz
			ω_b	3.15	Hz

L'equazione del moto per il sistema a più gdl forzato è:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (4.31)$$

Nello spazio delle variabili di stato nodali, si riscrive il problema nella forma matriciale compatta:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) \\ \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (4.32)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_N} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}(t) \\ \ddot{\mathbf{u}}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{Y}}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_N} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}_N} \mathbf{F}(t) \quad (4.33)$$

$\mathbf{Y}(t)$ è il vettore che raccoglie la risposta spostamento e velocità per ogni grado di libertà. Premoltiplicando per \mathbf{A}_N^{-1} si scrive l'equazione del moto in forma canonica:

$$\mathbf{A}_N^{-1}\mathbf{A}_N\dot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{A}_N^{-1}\mathbf{B}_N\mathbf{Y}(t) = \mathbf{A}_N^{-1}\mathbf{V}_N\mathbf{F}(t) \quad (4.34)$$

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{D}_N\mathbf{Y}(t) + \mathbf{W}_N\mathbf{F}(t) \quad (4.35)$$

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{D}_N\mathbf{Y}(t) + \mathbf{f}(t) \quad (4.36)$$

In cui \mathbf{D}_N è:

$$\mathbf{D}_N = -\mathbf{A}_N^{-1}\mathbf{B}_N = -\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}^{-1} \\ \mathbf{M}^{-1} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Per calcolare la risposta con metodi di integrazione al passo si sceglie opportuno Δt , considerando che la tecnica è incondizionatamente stabile, si costruiscono la matrice di transizione Θ_N e gli operatori di carico

$$\Theta_N = e^{\mathbf{D}_N\Delta t}$$

$$\mathbf{L}_N(\Delta t) = [\Theta_N(\Delta t) - \mathbf{I}]\mathbf{D}_N^{-1}$$

$$\gamma_{0,N}(\Delta t) = \left[\Theta_N(\Delta t) - \frac{1}{\Delta t}\mathbf{L}_N(\Delta t) \right] \mathbf{D}_N^{-1} \quad (4.38)$$

$$\gamma_{1,N}(\Delta t) = \left[\frac{1}{\Delta t}\mathbf{L}_N(\Delta t) - \mathbf{I} \right] \mathbf{D}_N^{-1}$$

Con forzante lineare nel passo, la risposta in variabili di stato al tempo k è:

$$\mathbf{y}(t_{k+1}) = \Theta_N(\Delta t)\mathbf{y}(t_k) + \gamma_{0,N}(\Delta t)\mathbf{V}_N\mathbf{f}(t_k) + \gamma_{1,N}(\Delta t)\mathbf{V}_N\mathbf{f}(t_k) \quad (4.39)$$

Sono stati generati $n = 1300$ accelerogrammi ed è stato calcolato il vettore risposta per ognuno di essi. Successivamente, per ogni risposta è stato calcolato il massimo e la media dei massimi, per ogni grado di libertà, risulta essere la seguente:

PILA 40 m						
BIS $\zeta_d 0.1$				BIS+TDI $\zeta_d 0.1$		
u1	0.024521	m		u1	0.024099	m
u2	0.106111	m	u2	0.07234	m	
-			u3	0.120359	m	

Si noti come lo spostamento massimo della pila sia rimasto pressoché lo stesso, avendo utilizzato i valori di frequenza ottimi ottenuti decidendo di mantenere la stessa efficienza in termini di protezione della pila. Si riporta in **Fig. 4.14** il confronto, per un particolare accelerogramma forzante, tra lo spostamento dell'impalcato tra i due casi e si notare come i picchi di smorzamento risultino notevolmente abbattuti.

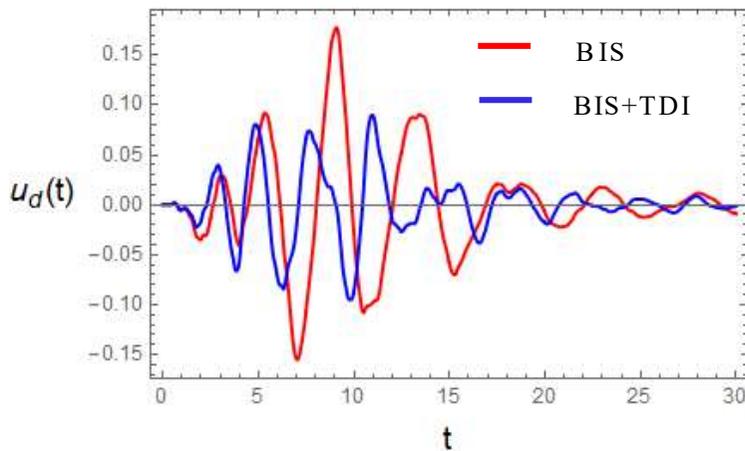


Fig. 4.14: Confronto tra il valore di spostamento dell'impalcato nel caso di installazione del solo sistema di isolamento e nel caso in cui venga aggiunto il TDI.

Dall'analisi dinamica deterministica sono stati ricavati a ritroso i valori delle varianze degli spostamenti per la pila da 40 m con $\zeta_d = 0.1$; dopo aver calcolato le risposte con l'integrazione al passo, per ciascuno degli n accelerogrammi si

ha $y_h(t)$ che varia nel tempo e di cui è possibile conoscere la media e la deviazione standard:

$$\mu_{y,h} = \frac{\sum_{h=1}^n y_h}{n} \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{h=1}^n (y_h - \mu_{y,h})^2}{n}} \quad (4.40)$$

Sono riportate in **Fig. 4.15** e in **Fig. 4.16** rispettivamente le deviazioni standard degli spostamenti della pila e dell'impalcato nel caso in cui il sistema sia solamente isolato (in rosso) e nel caso in cui oltre l'isolamento sia stato inserito il TDI (blu).

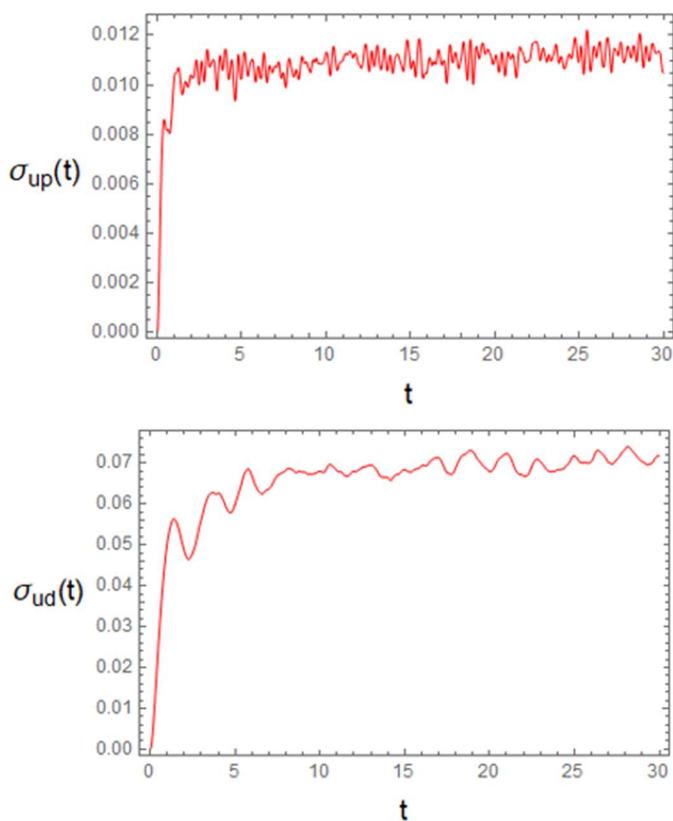


Fig. 4.15: Deviazione standard dello spostamento della pila e dell'impalcato nel caso di sistema solo isolato

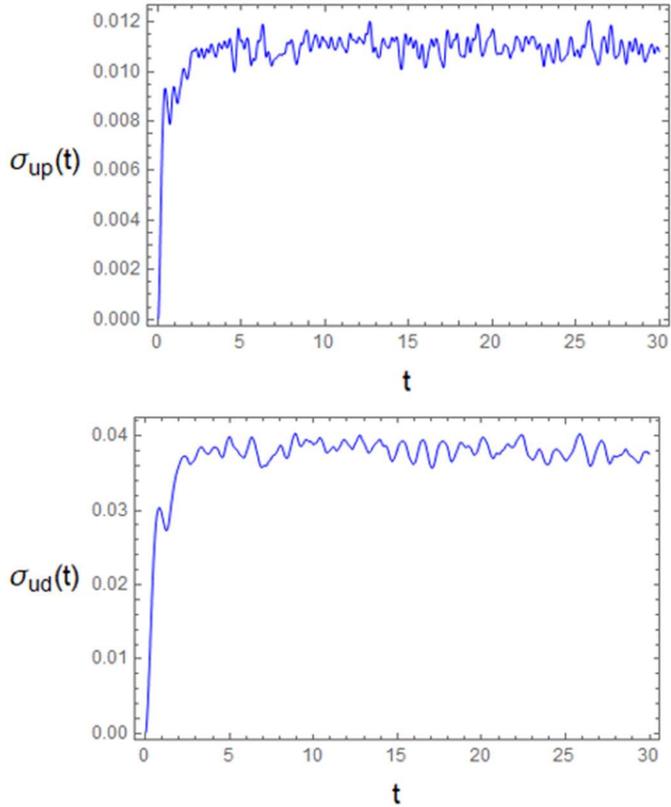


Fig. 4.16: Deviazione standard dello spostamento della pila e dell'impalcato nel caso di sistema con isolamento+TDI

I valori medi delle deviazioni standard riportate in figura corrispondono con buona approssimazione ai valori trovati nei paragrafi precedenti con la soluzione di Lyapunov per la Matrice di Covarianza:

PILA 40 m				
SIMULAZIONE MONTE CARLO			LYAPUNOV	
BIS ζ_d 0.1			BIS ζ_d 0.1	
σ_{up}	0.0109638		σ_{up}	0.0110173
σ_{ud}	0.0682034		σ_{ud}	0.0691376
BIS + TDI ζ_d 0.1			BIS + TDI ζ_d 0.1	
σ_{up}	0.0109686		σ_{up}	0.0110068
σ_{ud}	0.0379726		σ_{ud}	0.0381902

4.3. PONTE A TRAVATA CONTINUA SOGGETTO A SISMA TRASVERSALE: TMDI SU PILA

Quando un ponte continuo è soggetto all'azione di un sisma trasversale, le sollecitazioni vengono assorbite dalle pile e si rende necessario interporre, tra pila ed impalcato, un sistema di isolamento apposito ed aggiuntivo rispetto al BIS utilizzato, sempre in testa alle pile, per affrontare il problema del sisma longitudinale. In questo caso, il sistema TMDI non è installato con uno dei capi del dispositivo inerter attaccato al suolo, configurazione che da letteratura è confermato essere la più vantaggiosa, ma le sue estremità sono collegate una alla pila e l'altra all'impalcato (**Fig. 4.17**). Di seguito si riportano le equazioni corrispondenti al modello adottato.

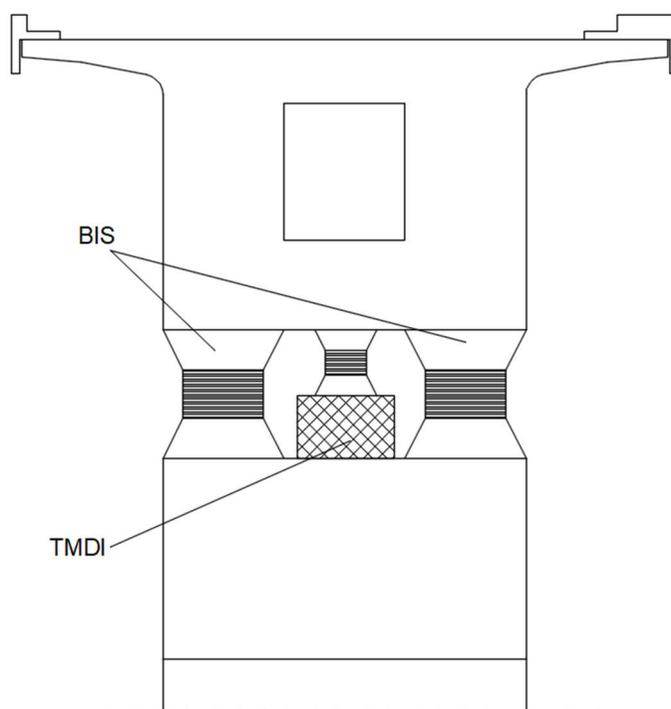


Fig. 4.17: Sezione pila con installazione TMDI e sistema di isolamento (BIS) tra pila e impalcato

4.3.1. EQUAZIONI DEL MOTO DEL MODELLO

Il sistema è formato, nella configurazione più semplice in cui si considera una sola pila, dalle caratteristiche di massa, rigidità e smorzamento della pila m_p, k_p, c_p , dalle caratteristiche di massa, rigidità e smorzamento dell'impalcato m_d, k_d, c_d , e dalle caratteristiche di massa, rigidità, smorzamento, inerzia e smorzamento interno dell'inerter m_b, k_b, c_b, b, c_i (**Fig. 4.18**).

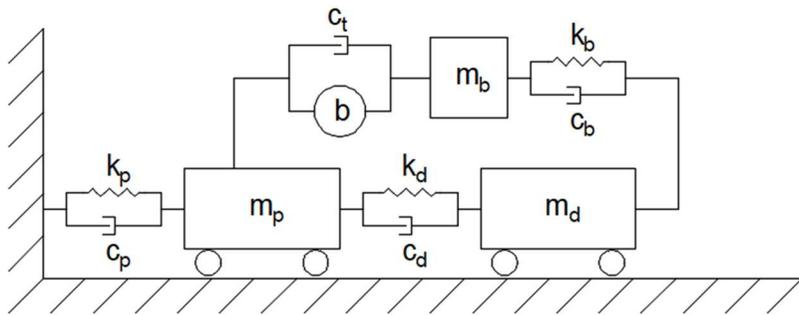
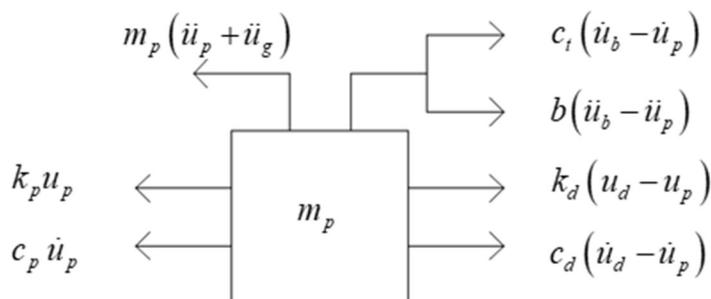


Fig. 4.18: Schema componenti sistema BIS+TMDI sulla pila

Il sistema ha tre gradi di libertà: lo spostamento della pila u_p , lo spostamento dell'impalcato u_d e lo spostamento del dispositivo inerter u_b . Si individuano le componenti che si attivano per ciascuno dei tre gradi di libertà nel caso di accelerazione sismica al suolo \ddot{u}_g .



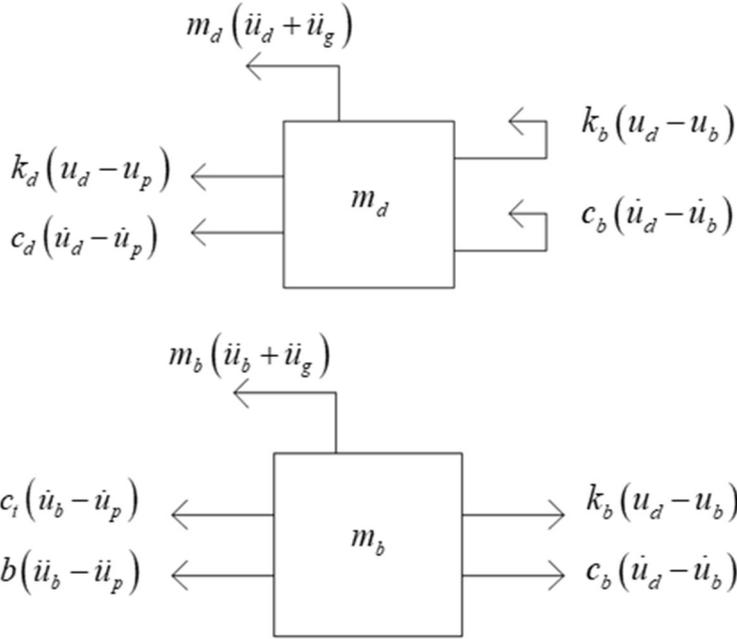


Fig. 4.19: attivazione dei tre gradi di libertà del sistema

Per ciascuno dei tre gradi di libertà del sistema si scrive la corrispondente equazione del moto:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 1) (m_p + b)\ddot{u}_p + (c_p + c_d + c_t)\dot{u}_p - c_d\dot{u}_d - c_t\dot{u}_b + (k_p + k_d)u_p + \\
 \quad - k_d u_d - b\ddot{u}_b = -m_p \ddot{u}_g \\
 2) m_d \ddot{u}_d - c_d \dot{u}_p + (c_d + c_b)\dot{u}_d - c_b \dot{u}_b - k_d u_p + (k_d + k_b)u_d + \\
 \quad - k_b u_b = -m_d \ddot{u}_g \\
 3) (m_b + b)\ddot{u}_b - b\ddot{u}_p - c_t \dot{u}_p + (c_t + c_b)\dot{u}_b - c_b \dot{u}_d - k_b u_d + k_b u_b = -m_b \ddot{u}_g
 \end{array} \right. \quad (4.41)$$

Al fine di rendere la trattazione più generica, si vuole adimensionalizzare la formulazione dividendo ciascun termine per la massa dell'impalcato e introducendo determinate posizioni; ad esempio, per la pila si hanno, in termini di masse, rigidezze e smorzamento:

$$\begin{aligned}
\frac{m_p}{m_d} &= \mu_p \\
\frac{k_p}{m_d} &= \frac{k_p}{m_d} \frac{m_p}{m_p} = \mu_p \omega_p^2 \\
\frac{c_p}{m_d} &= \frac{c_p}{m_d} \frac{m_p}{m_p} = \mu_p 2\zeta_p \omega_p
\end{aligned}
\tag{4.42}$$

Per il dispositivo con inerter si hanno:

$$\begin{aligned}
\frac{m_b}{m_d} &= \mu_b & \frac{b}{m_d} &= \beta \\
\frac{k_b}{m_d} &= \frac{k_b}{m_d} \frac{m_b + b}{m_b + b} = (\mu_b + \beta) \omega_b^2 \\
\omega_b &= \sqrt{\frac{k_b}{m_b + b}} \\
\frac{c_b}{m_d} &= \frac{c_b}{m_d} \frac{m_b + b}{m_b + b} = (\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b \\
\frac{c_t}{m_d} &= \frac{\gamma c_b}{m_d} = \gamma (\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b
\end{aligned}
\tag{4.43}$$

Infine, per le quantità relative all'impalcato, classicamente:

$$\begin{aligned}
\frac{k_d}{m_d} &= \omega_d^2 \\
\frac{c_d}{m_d} &= 2\zeta_d \omega_d
\end{aligned}
\tag{4.44}$$

Adimensionalizzando le equazioni della (4.41) e mettendo le equazioni a sistema con le due equazioni del filtro di Clough e Penzien riportate alla (4.8), sostituendo all'accelerazione sismica al suolo la sua formulazione alla (4.7) si ottengono:

$$\left. \begin{aligned}
1) & (\mu_p + \beta)\ddot{u}_p - \beta\ddot{u}_b + (\mu_p 2\zeta_p \omega_p + 2\zeta_d \omega_d + \gamma(\mu_b + \beta)2\zeta_b \omega_b)\dot{u}_p - 2\zeta_d \omega_d \dot{u}_d + \\
& - \gamma(\mu_b + \beta)2\zeta_b \omega_b \dot{u}_b + (\mu_p \omega_p^2 + \omega_d^2)u_p - \omega_d^2 u_d - \mu_p \omega_s^2 u_s - \mu_p 2\zeta_s \omega_s \dot{u}_s + \\
& + \mu_p \omega_k^2 u_k + \mu_p 2\zeta_k \omega_k \dot{u}_k = 0 \\
2) & \ddot{u}_d + [2\zeta_d \omega_d + (\mu_b + \beta)2\zeta_b \omega_b]\dot{u}_d - 2\zeta_d \omega_d \dot{u}_p - (\mu_b + \beta)2\zeta_b \omega_b \dot{u}_b + \\
& - \omega_d^2 u_p + [(\mu_b + \beta)\omega_b^2 + \omega_d^2]u_d - (\mu_b + \beta)\omega_b^2 u_b - \omega_s^2 u_s - 2\zeta_s \omega_s \dot{u}_s + \\
& + \omega_k^2 u_k + 2\zeta_k \omega_k \dot{u}_k = 0 \\
3) & (\mu_b + \beta)\ddot{u}_b - \beta\ddot{u}_p - (\mu_b + \beta)2\zeta_b \omega_b \dot{u}_d + [(\mu_b + \beta)2\zeta_b \omega_b + \gamma(\mu_b + \beta)2\zeta_b \omega_b]\dot{u}_b + \\
& - \gamma(\mu_b + \beta)2\zeta_b \omega_b \dot{u}_p - (\mu_b + \beta)\omega_b^2 u_d + (\mu_b + \beta)\omega_b^2 u_b - \mu_b \omega_s^2 u_s - \mu_b 2\zeta_s \omega_s \dot{u}_s + \\
& + \mu_b \omega_k^2 u_k + \mu_b 2\zeta_k \omega_k \dot{u}_k = 0 \\
4) & \ddot{u}_s + 2\zeta_s \omega_s \dot{u}_s + \omega_s^2 u_s - \omega_k^2 u_k - 2\zeta_k \omega_k \dot{u}_k = 0 \\
5) & \ddot{u}_k + 2\zeta_k \omega_k \dot{u}_k + \omega_k^2 u_k = -S_w
\end{aligned} \right\} \quad (4.45)$$

Si costruiscono le matrici delle masse, di dissipazione e delle rigidzze $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$ ed i vettori che raccolgono le accelerazioni, le velocità e gli spostamenti dei cinque gradi di libertà del sistema:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (\mu_p + \beta) & 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & (\mu_b + \beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{u}_p \\ \ddot{u}_d \\ \ddot{u}_b \\ \ddot{u}_s \\ \ddot{u}_k \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{u}}} \quad (4.46)$$

$$\begin{bmatrix}
\left[\begin{array}{c} \mu_p 2\zeta_p \omega_p + 2\zeta_d \omega_d + \\ \gamma(\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b \end{array} \right] & -2\zeta_d \omega_d & -\gamma(\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b & -\mu_p 2\zeta_s \omega_s & \mu_p 2\zeta_k \omega_k \\
-2\zeta_d \omega_d & [(\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b + 2\zeta_d \omega_d] & -(\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b & -2\zeta_s \omega_s & 2\zeta_k \omega_k \\
-\gamma(\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b & -(\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b & \left[\begin{array}{c} (\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b + \\ \gamma(\mu_b + \beta) 2\zeta_b \omega_b \end{array} \right] & -\mu_b 2\zeta_s \omega_s & \mu_b 2\zeta_k \omega_k \\
0 & 0 & 0 & 2\zeta_s \omega_s & -2\zeta_k \omega_k \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2\zeta_k \omega_k
\end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{u}_p \\ \dot{u}_d \\ \dot{u}_b \\ \dot{u}_s \\ \dot{u}_k \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{u}}}
\end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$$\begin{bmatrix}
(\mu_p \omega_p^2 + \omega_d^2) & -\omega_d^2 & 0 & -\mu_p \omega_s^2 & \mu_p \omega_k^2 \\
-\omega_d^2 & ((\mu_b + \beta) \omega_b^2 + \omega_d^2) & -(\mu_b + \beta) \omega_b^2 & -\omega_s^2 & \omega_k^2 \\
0 & -(\mu_b + \beta) \omega_b^2 & (\mu_b + \beta) \omega_b^2 & -\mu_b \omega_s^2 & \mu_b \omega_k^2 \\
0 & 0 & 0 & \omega_s^2 & -\omega_k^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \omega_k^2
\end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} u_p \\ u_d \\ u_b \\ u_s \\ u_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}
\end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Il vettore forzante avrà la densità spettrale di potenza del rumore bianco in corrispondenza del grado di libertà del secondo oscillatore del filtro:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -S_w \end{bmatrix}^T \quad (4.49)$$

Scritte le matrici si può formulare in variabili di stato il problema dinamico analogamente a quanto fatto nel paragrafo 4.2.1 per il ponte soggetto a sisma longitudinale; scritta l'equazione di Lyapunov nella formulazione riportata alla (4.23), si calcolano le deviazioni standard dei tre spostamenti associati ai tre principali gradi di libertà, ovvero gli spostamenti di pila, impalcato e inerter $\sigma_1 = \sigma_{up}$, $\sigma_2 = \sigma_{ud}$, $\sigma_3 = \sigma_{ub}$.

4.3.2. INDAGINI NUMERICHE

Le prove numeriche sono state condotte, al pari dell'applicazione precedente, su pile di 20 m, 40 m, 60 m ed 80 m, considerando le masse e le frequenze risultanti dall'analisi modale della pila singola e dell'impalcato effettuate con il Software

SAP2000 e riportate in **Fig. 4.6**. Alla (4.25) si riportano inoltre i valori dei parametri presenti nelle equazioni di Clough e Penzien riferiti al terremoto di El Centro.

Lo studio si effettua sempre per Step successivi, considerando dapprima il caso in cui è presente il solo isolamento in testa alle pile e successivamente come migliorano le prestazioni se si aggiunge un TMDI.

4.3.2.1. STEP 1: calcolo del ponte isolato

Per valutare la struttura solo isolata, il modello si riduce solamente a due gradi di libertà: lo spostamento della pila e lo spostamento dell'impalcato. Le equazioni e le matrici sono ovviamente le stesse ricavate al paragrafo 4.2.2.1, e così i risultati.

Tuttavia, per il calcolo del ponte con isolamento e TMDI in testa interessa conoscere gli spostamenti dell'impalcato in termini assoluti rispetto al suolo, mentre nell'applicazione precedente gli spostamenti erano relativi rispetto alla testa della pila. Si riportano pertanto i risultati per le deviazioni standard dell'impalcato con $\sigma_{ud,abs}$.

PILA 20 m								
ISOLATED SYSTEM ζd 0.1			ISOLATED SYSTEM ζd 0.15			ISOLATED SYSTEM ζd 0.2		
$\sigma_{upisol,min}$	0.002454	m	$\sigma_{upisol,min}$	0.00227	m	$\sigma_{upisol,min}$	0.002125	m
$\omega d_{aupisol,min}$	1.39	1/sec	$\omega d_{aupisol,min}$	1.63	1/sec	$\omega d_{aupisol,min}$	1.79	1/sec
σ_{udisol}	0.064425	m	σ_{udisol}	0.05156	m	σ_{udisol}	0.042555	m

PILA 40 m								
sistema isolato ζd 0.1			sistema isolato ζd 0.15			sistema isolato ζd 0.2		
$\sigma_{upisol,min}$	0.011017	m	$\sigma_{upisol,min}$	0.00982	m	$\sigma_{upisol,min}$	0.009074	m
$\omega d_{aupisol,min}$	1.42	1/sec	$\omega d_{aupisol,min}$	1.51	1/sec	$\omega d_{aupisol,min}$	1.55	1/sec
σ_{udisol}	0.069138	m	σ_{udisol}	0.05688	m	σ_{udisol}	0.049019	m

PILA 60 m								
sistema isolato ζd 0.1			sistema isolato ζd 0.15			sistema isolato ζd 0.2		
$\sigma_{upisol,min}$	0.018657	m	$\sigma_{upisol,min}$	0.01655	m	$\sigma_{upisol,min}$	0.015393	m
$\omega d_{aupisol,min}$	1.47	1/sec	$\omega d_{aupisol,min}$	1.53	1/sec	$\omega d_{aupisol,min}$	1.54	1/sec
σ_{udisol}	0.075574	m	σ_{udisol}	0.06285	m	σ_{udisol}	0.062543	m

PILA 80 m								
sistema isolato ζ_d 0.1			sistema isolato ζ_d 0.15			sistema isolato ζ_d 0.2		
$\sigma_{upisol,min}$	0.024354	m	$\sigma_{upisol,min}$	0.02167	m	$\sigma_{upisol,min}$	0.020292	m
$\omega d_{upisol,min}$	1.64	1/sec	$\omega d_{upisol,min}$	1.69	1/sec	$\omega d_{upisol,min}$	1.69	1/sec
σ_{udisol}	0.083341	m	σ_{udisol}	0.06933	m	σ_{udisol}	0.060327	m

4.3.2.2. STEP 2: calcolo del ponte con isolamento + TDI su pila

Lo step successivo consiste nel calcolare la deviazione standard per gli spostamenti di pila, impalcato ed inerter. Si utilizzano le matrici e le equazioni ricavate al paragrafo 4.3.1.

Rispetto ai dati numerici utilizzati come input nello step 1, anche in questo caso si aggiungono i dati relativi ai parametri dell'inerter e la variabilità della frequenza del TDI, che si ricordano essere:

$$\omega_d, \omega_b = \text{var} \quad \zeta_d = 0.10 \quad \zeta_d = 0.15 \quad \zeta_d = 0.20$$

Inerter device		
m_b	0	ton
β	0.2	
ζ_b	0.2	
ω_b		
γ	1	

Si noti come la massa accordata sia posta uguale a zero.

Così come visto per l'applicazione 1, i risultati delle deviazioni standard non saranno delle curve ma delle superfici: σ_{up} e σ_{ud} variano sia con ω_d che con ω_b (Fig. 4.9).

Si opera sempre nel seguente modo: si vuole mantenere per la deviazione standard lo stesso valore raggiunto grazie al solo isolamento. Fissato il valore di $\sigma_{up} = \sigma_{up,isol,min}$, una superficie planare interseca la superficie della deviazione standard in una serie di punti cui corrispondono coppie di frequenze; si sceglie

allora la coppia (ω_b, ω_d) che fornisce il minimo valore della σ_{ud} , con il vantaggio di aver mantenuto la stessa convenienza sulla σ_{up} che si era ottenuta con l'isolamento tradizionale.

4.3.2.3. **STEP 3: confronto tra i risultati e commenti**

Si riportano, in forma tabellare, i confronti tra i valori delle deviazioni standard tra il caso in cui si ha il solo isolamento (step 1) ed il caso in cui venga aggiunto sulla pila un TDI (step 2); i risultati riguardano i quattro casi con pile di diverse altezze, dai 20 agli 80 m, e per tre diversi valori dello smorzamento scelto per il sistema di isolamento. In questo caso la convenienza sulla deviazione standard dello spostamento dell'impalcato si osserva in termini di spostamento assoluto rispetto al suolo. Si ritrovano valori di riduzione percentuale della deviazione standard dello spostamento dell'impalcato, rispetto al suolo, paragonabili all'efficacia dimostrata dal sistema installato sulla spalla per il sisma longitudinale.

Per le pile da 20 m la riduzione della deviazione standard per lo spostamento dell'impalcato è notevole ed è compresa tra il 60% ed il 70%; per le pile da 40 m si mantiene tra il 36% ed il 47 % mentre per le pile da 60 m e da 80 m è compresa generalmente tra il 30% ed il 40%, mostrando pertanto in ogni caso un'ottima riduzione. Anche nel caso di sisma trasversale, come osservato per i risultati del sisma longitudinale al paragrafo 4.2.2.3, le riduzioni maggiori si hanno per valori di smorzamento dell'isolamento pari a $\zeta_d = 0.1$, mentre mostrano una leggera diminuzione in termini di efficacia per $\zeta_d = 0.15$ e $\zeta_d = 0.2$, che non è eccessiva e si aggira intorno al 10%, per ogni tipologia di pila studiata. Oltretutto, anche se la riduzione percentuale è maggiore nel caso di smorzamento più basso, ovviamente in termini assoluti sarà sempre più conveniente lavorare con smorzamenti più grandi, in quanto i valori di partenza da abbattere sono inferiori

e, pur con una riduzione percentuale più bassa, anche i valori finali saranno più bassi rispetto agli altri casi.

PILA 20 m								
BIS ζ d 0.1			BIS ζ d 0.15			BIS ζ d 0.2		
$\sigma_{upisol,min}$	0.002454	m	$\sigma_{upisol,min}$	0.00227	m	$\sigma_{upisol,min}$	0.002125	m
$\omega d_{\sigma upisol,min}$	1.39	1/sec	$\omega d_{\sigma upisol,min}$	1.63	1/sec	$\omega d_{\sigma upisol,min}$	1.79	1/sec
σ_{udisol}	0.06388	m	σ_{udisol}	0.05096	m	σ_{udisol}	0.041965	m

BIS + TDI ζ d 0.1			BIS + TDI ζ d 0.15			BIS + TDI ζ d 0.2		
σ_{up}	0.002454	m	σ_{up}	0.00227	m	σ_{up}	0.002123	m
$\sigma_{ud,min}$	0.019874	m	$\sigma_{ud,min}$	0.01759	m	$\sigma_{ud,min}$	0.016692	m
ωd	3.97	1/sec	ωd	3.98	1/sec	ωd	3.78	1/sec
ωb	4.48	1/sec	ωb	5.29	1/sec	ωb	6.43	1/sec

$\sigma_{ud,min}$ **-68.89%**

$\sigma_{ud,min}$ **-65.49%**

$\sigma_{ud,min}$ **-60.22%**

PILA 40 m								
BIS ζ d 0.1			BIS ζ d 0.15			BIS ζ d 0.2		
$\sigma_{upisol,min}$	0.011017	m	$\sigma_{upisol,min}$	0.00982	m	$\sigma_{upisol,min}$	0.009074	m
$\omega d_{\sigma upisol,min}$	1.42	1/sec	$\omega d_{\sigma upisol,min}$	1.51	1/sec	$\omega d_{\sigma upisol,min}$	1.55	1/sec
σ_{udisol}	0.065937	m	σ_{udisol}	0.05401	m	σ_{udisol}	0.046529	m

BIS + TDI ζ d 0.1			BIS + TDI ζ d 0.15			BIS + TDI ζ d 0.2		
σ_{up}	0.011017	m	σ_{up}	0.00982	m	σ_{up}	0.009073	m
$\sigma_{ud,min}$	0.034576	m	$\sigma_{ud,min}$	0.03136	m	$\sigma_{ud,min}$	0.029704	m
ωd	2.7	1/sec	ωd	2.44	1/sec	ωd	2.12	1/sec
ωb	5.53	1/sec	ωb	6.34	1/sec	ωb	6.24	1/sec

$\sigma_{ud,min}$ **-47.56%**

$\sigma_{ud,min}$ **-41.94%**

$\sigma_{ud,min}$ **-36.16%**

PILA 60 m								
BIS ζ d 0.1			BIS ζ d 0.15			BIS ζ d 0.2		
$\sigma_{upisol,min}$	0.018657	m	$\sigma_{upisol,min}$	0.01655	m	$\sigma_{upisol,min}$	0.015393	m
$\omega d_{\sigma upisol,min}$	1.47	1/sec	$\omega d_{\sigma upisol,min}$	1.53	1/sec	$\omega d_{\sigma upisol,min}$	1.54	1/sec
σ_{udisol}	0.06981	m	σ_{udisol}	0.05783	m	σ_{udisol}	0.050443	m

BIS + TDI ζ d 0.1			BIS + TDI ζ d 0.15			BIS + TDI ζ d 0.2		
σ_{up}	0.018657	m	σ_{up}	0.01655	m	σ_{up}	0.015393	m
$\sigma_{ud,min}$	0.040486	m	$\sigma_{ud,min}$	0.03709	m	$\sigma_{ud,min}$	0.035517	m
ωd	2.35	1/sec	ωd	2.02	1/sec	ωd	1.6	1/sec
ωb	6.23	1/sec	ωb	6.33	1/sec	ωb	5.01	1/sec

$\sigma_{ud,min}$ **-42.01%**

$\sigma_{ud,min}$ **-35.86%**

$\sigma_{ud,min}$ **-29.59%**

PILA 80 m								
BIS ζ_d 0.1			BIS ζ_d 0.15			BIS ζ_d 0.2		
$\sigma_{upisol,min}$	0.024354	m	$\sigma_{upisol,min}$	0.02167	m	$\sigma_{upisol,min}$	0.020292	m
$\omega d_{\sigma_{upisol,min}}$	1.64	1/sec	$\omega d_{\sigma_{upisol,min}}$	1.69	1/sec	$\omega d_{\sigma_{upisol,min}}$	1.69	1/sec
σ_{udisol}	0.07538	m	σ_{udisol}	0.06245	m	σ_{udisol}	0.054558	m

BIS + TDI ζ_d 0.1			BIS + TDI ζ_d 0.15			BIS + TDI ζ_d 0.2		
σ_{up}	0.024349	m	σ_{up}	0.02167	m	σ_{up}	0.020289	m
$\sigma_{ud,min}$	0.046265	m	$\sigma_{ud,min}$	0.04088	m	$\sigma_{ud,min}$	0.039736	m
ωd	2.43	1/sec	ωd	2.07	1/sec	ωd	1.91	1/sec
ωb	3.15	1/sec	ωb	6.48	1/sec	ωb	3.8	1/sec

$\sigma_{ud,min}$	-38.62%
-------------------	----------------

$\sigma_{ud,min}$	-34.54%
-------------------	----------------

$\sigma_{ud,min}$	-27.17%
-------------------	----------------

Per quanto concerne l'osservazione dell'andamento delle frequenze dei due sistemi, le frequenze del sistema di isolamento sono più basse rispetto a quelle con cui va dimensionato il sistema in abbinamento al TDI ovvero, così come nel caso di ponte soggetto a sisma longitudinale, anche in questo caso il sistema combinato è più rigido rispetto al solo BIS (**Fig. 4.20**). Invece, per quanto concerne la frequenza del TDI rispetto agli isolatori, si ha riconferma che sempre, per ognuno dei 12 casi, si ha $\omega_b > \omega_d$; tuttavia, per sisma trasversale non è stato osservato univocamente un aumento o una riduzione della frequenza ω_b al variare dell'altezza della pila e dello smorzamento. Ad esempio, solo per la pila da 20 m si ha che la frequenza ω_b cresce al crescere dello smorzamento, ma ciò non è confermato dall'osservazione dell'andamento per le altre pile; inoltre, per lo smorzamento $\zeta_d = 0.15$ la frequenza del TDI ha un andamento crescente all'aumentare dell'altezza della pila, per $\zeta_d = 0.2$ l'andamento è fortemente decrescente mentre per $\zeta_d = 0.1$ si può osservare come ω_b aumenti notevolmente per altezze dai 20 m ai 60 m e poi abbia una forte riduzione in corrispondenza della pila alta 80 m.

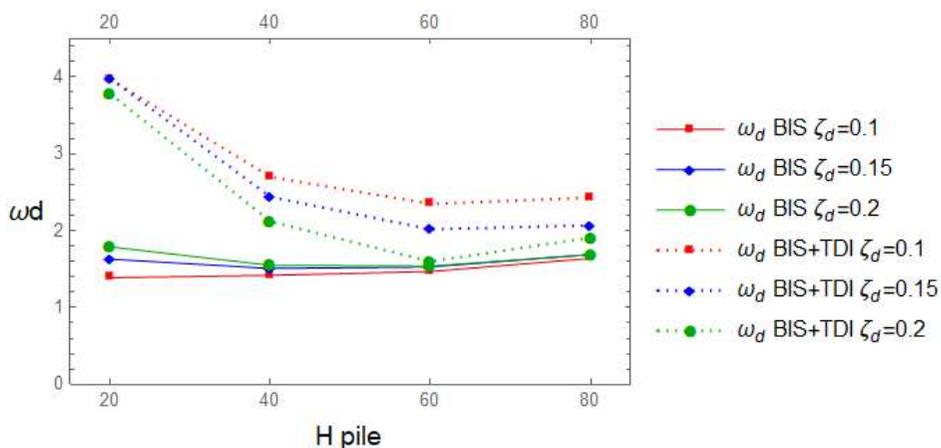


Fig. 4.20: Andamento della frequenza di isolamento per pile di diversa altezza (20, 40, 60, 80 m), con diversi valori di smorzamento (0.1, 0.15, 0.2), nel caso di sistema solamente isolato (BIS) oppure con aggiunta di TDI

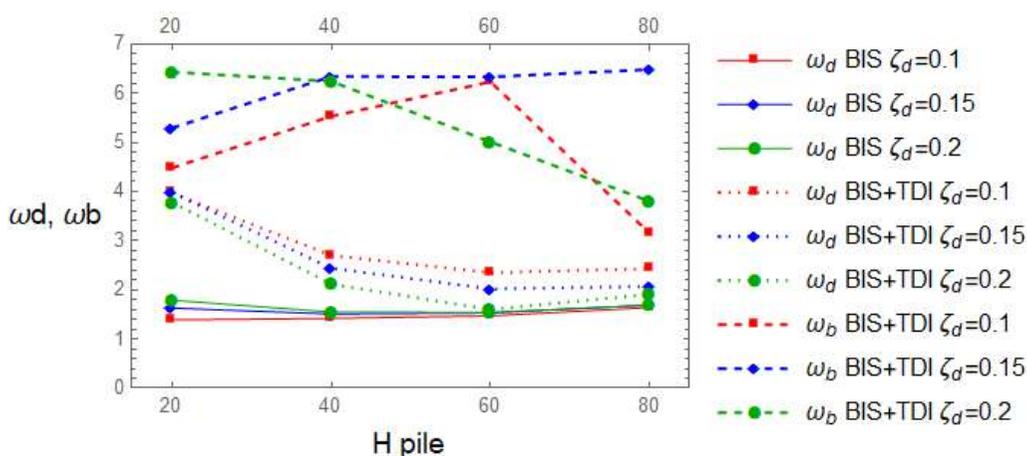


Fig. 4.21: Andamento della frequenza di isolamento e della frequenza del TDI per pile di diversa altezza (20, 40, 60, 80 m), con diversi valori di smorzamento (0.1, 0.15, 0.2), nel caso di sistema solamente isolato (BIS) oppure con aggiunta di TDI

4.4. SINOSSI

Nel presente capitolo è stato trattato il problema della protezione dei ponti continui in c.a. soggetti a sismi longitudinali o trasversali. Partendo da un'iniziale disamina dello stato dell'arte con specifico riferimento alle classiche tecniche di

isolamento, sono stati messi in luce i vantaggi e gli svantaggi dei sistemi odierni: il BIS consente efficacemente di ridurre le azioni che vengono esercitate sulle pile sia in termini di spostamento in testa che di taglio alla base, proteggendo così anche le fondazioni. Tuttavia, ciò avviene a scapito di un incremento degli spostamenti dell'impalcato sia nel caso di sisma longitudinale che trasversale, il che può compromettere la funzionalità dei giunti terminali dell'impalcato fino alla rottura, può implicare il martellamento tra elementi strutturali contigui e può inoltre causare il raggiungimento del massimo spostamento degli isolatori.

La soluzione proposta consiste nell'abbinare il sistema BIS e il TMD, configurazione già nota in letteratura, ma aggiungendo il dispositivo inerter in modo tale da superare le problematiche realizzative di strutturali derivanti da grandi masse accordate al sistema principale. Questa soluzione combinata si inserisce in un ambito di ricerca ancora non molto ricco: vi sono degli studi sull'abbinamento del sistema di isolamento con dispositivi a masse accordate, ma solo pochi lavori indagano cosa avviene introducendo anche l'inerter nella configurazione e generalmente analizzano il comportamento di strutture.

Lo studio qui condotto ha riguardato la protezione di un ponte continuo schematizzato, nelle applicazioni numeriche, come formato unicamente da una pila, dalla campata terminale con spalla e dalla semi-campata centrale. Sono state effettuate due applicazioni in quanto il ponte può essere soggetto ad un sisma longitudinale oppure trasversale. Per entrambe le applicazioni sul ponte è stata valutata inizialmente l'incidenza del solo sistema di isolamento in termini di riduzione della deviazione standard degli spostamenti della pila; ne è conseguito, come ci si aspettava, che la pila viene protetta dal sistema BIS con una riduzione degli spostamenti significativa, ma per l'impalcato incrementa il valore dello spostamento. A questo punto, inserendo nel sistema un dispositivo TDI in cui la massa fisica viene annullata e si sfrutta esclusivamente l'inerter per il controllo delle vibrazioni, si è scelto di mantenere il valore della deviazione standard per lo spostamento della pila ottimizzato dallo step precedente; sono stati allora

determinati quei valori di progetto per le frequenze del sistema di isolamento e del TDI che garantiscono contemporaneamente la stessa riduzione della deviazione standard dello spostamento della pila del caso isolato ed in aggiunta una notevole riduzione anche sulla deviazione standard dello spostamento dell'impalcato.

Le prove numeriche sono state condotte, in entrambe le applicazioni, per quattro diverse possibili altezze della pila: 20 m, 40 m, 60 m e 80 m e per diversi valori di smorzamento del sistema di isolamento. I risultati hanno evidenziato come, mantenendo la medesima riduzione dello stress della pila rispetto al caso solo isolato, con l'aggiunta del TMDI si ottiene una riduzione della deviazione standard dello spostamento dell'impalcato almeno pari al 30% nel caso di pila alta 80 m e che raggiunge persino il 70% per la pila di 20 m.

In conclusione, gli esiti della configurazione utilizzata sono pertanto più che positivi ed in futuro innanzitutto ci si propone di completare l'analisi in dinamica aleatoria applicata in maniera esemplificativa solamente su una pila e per un valore dello smorzamento, generando un numero maggiore di accelerogrammi al fine di ottenere un'adeguata accuratezza dei risultati, considerando anche sismi in input che abbiano caratteristiche diverse dal terremoto di El Centro studiato. I passi successivi riguardano inoltre l'estendere le prove numeriche anche ad i casi in cui sono presenti più pile, così come teorizzato nelle equazioni del moto del modello, aventi altezze uguali tra loro e successivamente dissimili, per valutare come le variazioni in termini di massa, frequenza e dissipazione di pile diverse influenzino il sistema.

CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

La tesi qui proposta ha avuto come obiettivo principe studiare una parte del vasto problema del controllo delle vibrazioni delle infrastrutture, in riferimento all'impiego di dispositivi di controllo passivi quali TMD e sistema di isolamento. Iniziando, nel primo capitolo, da una panoramica dei principali sistemi di controllo e della letteratura riguardante i TMD ed isolatori, sono stati delineati i vantaggi di tali dispositivi ed anche le problematiche che la loro applicazione non risolve o cagiona, soprattutto in luce del fatto che il funzionamento del TMD dipende dall'installazione di masse notevoli.

Successivamente, volendo risolvere tali problematiche sopracitate, nel secondo capitolo si è introdotto concettualmente il dispositivo inerter da utilizzarsi in abbinamento ad uno o ad entrambi gli altri due, in modo tale da aumentare l'efficacia dell'installazione.

I successivi capitoli riguardano applicazioni numeriche dell'inerter nel controllo delle vibrazioni in due grandi e differenti infrastrutture: le condotte con fluido transitante all'interno e i ponti continui. Nel terzo capitolo, sono stati introdotti da letteratura alcuni dei metodi utilizzati per il controllo delle vibrazioni nelle condotte, con particolare riferimento all'utilizzo di supporti risonanti che consentono di attenuare la diffusione delle onde per determinati range di frequenza. Tali range possono essere pilotati utilizzando appositi risonatori, in termini di frequenza di apertura e di chiusura ed anche di qualità dell'attenuazione all'interno. L'inerter consente di ottenere ottimi risultati mantenendo compatti i dispositivi, i quali difatti necessitano di masse ingenti per il loro corretto funzionamento alle basse frequenze, ovvero quelle di maggior interesse nell'ambito civile. È stato visto come la risonanza locale innescata dal poggiare la condotta su dispositivi risonanti con inerter, studiati in due diverse

configurazioni degli elementi componenti, ha fatto sì che a partire dalla frequenza scelta per la sintonizzazione si aprisse un intervallo all'interno del quale le vibrazioni non riuscivano a diffondersi. Il grande vantaggio dell'inerter consiste non soltanto nella qualità dell'attenuazione e dell'ampiezza del *band gap* in cui si ha la riduzione prevista ma, grazie all'inertanza elevata che supplisce alla presenza di masse notevoli, è stato possibile soprattutto dislocare i risonatori ad una distanza l'uno dall'altro dell'ordine dei metri. È un risultato importante soprattutto alla luce della convenienza progettuale e realizzativa dei supporti così dilazionati, piuttosto che ricorrere a distese quasi continue di difficile realizzazione.

All'interno del quarto capitolo sono stati studiati due schemi di utilizzo del dispositivo TMDI con massa accordata nulla, in abbinamento con un classico sistema di isolamento utilizzato tra le pile e l'impalcato per la protezione dei ponti continui nei confronti delle azioni sismiche. L'isolamento classico riesce egregiamente a ridurre lo stress sulle pile, ma permangono problematiche in termini di incremento degli spostamenti dell'impalcato, la cui conseguenza è il rischio di crisi e rottura dei giunti di dilatazione di estremità e degli elementi strutturali tra loro contigui, per martellamento. Nell'ottica di voler risolvere tale problematica, si è scelto di coadiuvare al sistema di isolamento classico un dispositivo TMDI; esso unisce i benefici dei dispositivi a massa accordata, in termini di riduzione degli spostamenti, ai grandi vantaggi apportati dall'inerter in sostituzione/abbinamento con la massa fisica, che può ridursi o addirittura annullarsi; in tal modo l'efficacia dello smorzamento dipende esclusivamente dall'inertza rotazionale dell'inerter. È stato studiato il caso di inserimento di un TMDI in due applicazioni diverse, sempre su ponte con isolamento in testa alle pile: nella prima applicazione, il ponte è soggetto ad un sisma longitudinale che incrementa gli spostamenti dell'impalcato con conseguente crisi dei giunti di estremità per estrema dilatazione/compressione e si è previsto l'inserimento dell'inerter sulla spalla. Nella seconda applicazione, il sisma trasversale che

colpisce il ponte incrementa gli spostamenti dell'impalcato ortogonalmente al suo sviluppo ed è stato inserito il TMDI tra pila ed impalcato insieme al sistema di isolamento.

Le applicazioni sono state condotte scegliendo di studiare preventivamente il sistema solamente isolato in modo tale da valutare quale fosse la riduzione sulla deviazione standard dello spostamento della pila, osservando al contempo come la deviazione standard dello spostamento dell'impalcato aumenti. Successivamente, è stato studiato il sistema con l'aggiunta del TMDI, individuando i valori delle frequenze del sistema di isolamento e del dispositivo in grado di fornire lo stesso valore di deviazione standard per la pila del caso solamente isolato precedente e per il quale si riesce ottenere la maggiore riduzione possibile della deviazione standard dello spostamento dell'impalcato.

L'obiettivo è stato raggiunto con successo per entrambe le applicazioni di sisma longitudinale o trasversale e per tutti i valori di altezza delle pile indagati. Tale incoraggiante risultato è fondamentale per la protezione degli elementi strutturali principali delle infrastrutture da ponte.

In ultima analisi, si può concludere che gli studi condotti hanno evidenziato come un valido aiuto, per risolvere alcune delle principali problematiche dei dispositivi passivi TMD e BIS, viene apportato dall'inserimento di un inerter nel sistema di controllo delle vibrazioni. La sua efficacia è stata testata su due tipologie diverse di infrastrutture: le condotte da fluido e i ponti continui; in entrambi i casi i risultati sono molto positivi e lasciano spazio ad ulteriori indagini future di approfondimento.

APPENDICE: CENNI DI TEORIA DEI PROCESSI ALEATORI

Nell'ambito dell'Ingegneria Civile, quando ci si pone l'obiettivo di modellare un sistema e le sollecitazioni che lo interessano al fine di ricavarne il comportamento con determinati indici di risposta di interesse, non ci si può avvalere esclusivamente di metodi deterministici. Le incertezze sulle geometrie, i materiali, l'entità e la variazione temporale e spaziale delle sollecitazioni sono solo alcuni dei motivi per i quali è necessario ricorrere a metodi di calcolo aleatorio, che forniscono risposte in termini di probabilità di collasso del sistema strutturale attraverso indici di sicurezza. Per la definizione di quantità aleatorie è necessario avere delle statistiche della variabile aleatoria di interesse, ovvero conoscerne la distribuzione associata o i parametri che la caratterizzano dal punto di vista probabilistico. Per tale ragione, si vogliono richiamare i concetti base della teoria dei processi aleatori e alcune delle sue quantità fondamentali, non avendo la presunzione di ricreare una disamina completa di tale teoria ma solamente di fornire gli strumenti per interpretare i metodi ed i risultati utilizzati nelle applicazioni.

Partendo dai termini fondamentali, la variabile aleatoria può essere continua oppure discreta: nel primo caso essa può assumere qualunque valore reale, nel secondo caso invece i possibili valori appartengono ad un insieme discreto di numeri. Considerando che la variabile aleatoria X abbia un dominio di esistenza, vi è una certa probabilità P che la variabile aleatoria X non superi un certo valore x che appartiene allo spazio campione. Tale probabilità prende il nome di funzione distribuzione di probabilità e si indica con:

$$F(x) = P[X \leq x] \quad (4.50)$$

Se la variabile aleatoria è continua, la funzione distribuzione è continua e si può esprimere come l'integrale di una funzione fondamentale per la teoria della

probabilità: la funzione densità di probabilità $p_X(x)$ alla (4.51), che è possibile ricavare dalla relazione inversa (4.52).

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p_X(\rho) d\rho \quad (4.51)$$

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (4.52)$$

È consuetudine, nell'ambito dell'analisi statistica, utilizzare una distribuzione normale della funzione densità di probabilità per descrivere la probabilità di accadimento di un evento, in quanto è stato osservato essere una descrizione abbastanza efficace per la maggior parte dei fenomeni naturali. Nella distribuzione normale, conosciuta anche come Gaussiana, la probabilità si concentra intorno ad un valor medio μ per poi decrescere verso le due code della distribuzione (**Fig. 4.22** sx). L'area sottesa alla curva è pari ad 1 in quanto rappresenta la possibilità che la variabile aleatoria assuma un valore all'interno del dominio, il che è certo. La funzione distribuzione $F_X[a]$, ovvero la probabilità che la variabile X assuma un valore inferiore ad a nel suo dominio, è riportata in **Fig. 4.22** a destra.

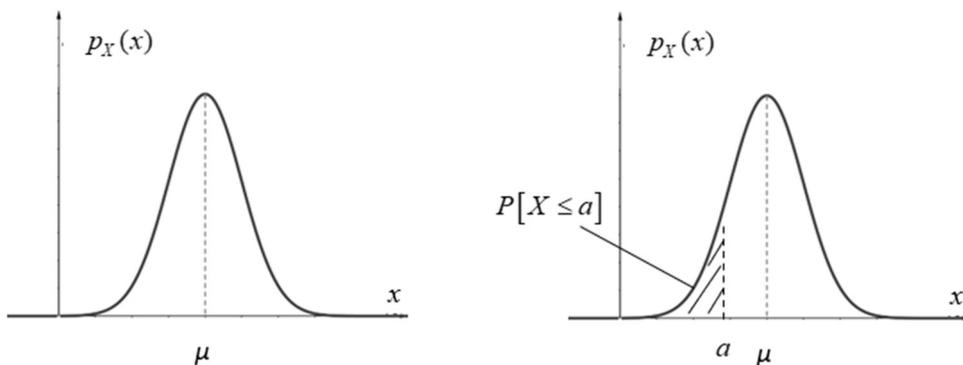


Fig. 4.22: distribuzione di probabilità normale

Il valor medio μ , o *valore atteso*, viene definito dall'operatore media stocastica: $E[X]$, il quale ha alcune proprietà sfruttabili per definire i *momenti*

della variabile aleatoria X , che ne descrivono le caratteristiche. In generale si definisce momento di ordine k :

$$m_k [X] = E[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p_X(x) dx \quad (4.53)$$

Da qui, è possibile dedurre che il momento di ordine 0 è pari ad 1 ovvero all'area sottesa alla funzione densità di probabilità:

$$m_0 [X] = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = 1 \quad (4.54)$$

Il momento di ordine 1 è pari al valor medio μ_X :

$$m_1 [X] = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx = \mu_X \quad (4.55)$$

Per quanto concerne i momenti di ordine superiore, è fondamentale il momento del secondo ordine pari al valor quadratico medio φ_X^2 :

$$m_2 [X] = E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x) dx = \varphi_X^2 \quad (4.56)$$

Attraverso il quale è possibile definire la varianza σ_X^2 :

$$\sigma_X^2 = \varphi_X^2 - \mu_X^2 \quad (4.57)$$

Con σ_X scarto quadratico medio o deviazione standard. La varianza e la deviazione standard danno una misura della dispersione, attorno al valor medio, della variabile aleatoria (**Fig. 4.23**).

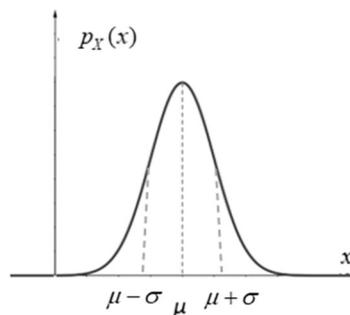


Fig. 4.23: dispersione attorno al valor medio di una variabile aleatoria con distribuzione normale gaussiana

Da un punto di vista probabilistico, la conoscenza di tutti i momenti permette di definire in modo completo le caratteristiche della variabile aleatoria X .

Alternativamente, è possibile caratterizzare la variabile aleatoria X noti che siano tutti i suoi cumulanti $k_j[X]$, essendo degli indici legati ai momenti dalla relazione (Di Paola et al., 1992) in forma recursiva seguente:

$$m_r = k_r + \sum_{j=1}^{r-1} \frac{(r-1)!}{j!(r-1-j)!} k_{r-j} m_j \quad (4.58)$$

Se tutti i cumulanti di ordine maggiore al secondo sono nulli, si parla di densità di probabilità normale o gaussiana, riferita ad una variabile aleatoria X gaussiana anch'essa e che pertanto per caratterizzarla è sufficiente che siano noti la media e la varianza relativi alla variabile aleatoria gaussiana.

si è in presenza di una coppia di variabili aleatorie, X_1 e si è in presenza di variabili aleatorie bidimensionali aventi $p_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ densità di probabilità congiunta e $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ distribuzione di probabilità congiunta. Una variabile aleatoria bidimensionale, avente X_1 e X_2 come componenti, ha un momento di ordine k pari a:

$$E[X_1^r X_2^s] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^r x_2^s p_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad \text{con} \quad r+s=k \quad (4.59)$$

Si riportano i momenti del primo del secondo e del terzo ordine delle variabili aleatorie bidimensionali e si sottolinea come i momenti del primo ordine siano uguali alla media delle variabili singole e detti medie marginali, i momenti del secondo ordine coincidono con i valori quadratici medi delle singole variabili più un momento incrociato, mentre i momenti del terzo ordine sono i momenti marginali del terzo ordine delle singole X_1 e X_2 più i due momenti incrociati.

$$\begin{aligned}
& E[X_1] \quad E[X_2] \\
& E[X_1^2] \quad E[X_1X_2] \quad E[X_2^2] \\
& E[X_1^3] \quad E[X_1^2X_2] \quad E[X_1X_2^2] \quad E[X_2^3]
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Dalla determinazione dei momenti fino al secondo ordine, è possibile ricavare le due varianze marginali $\sigma_{X_1}^2$, $\sigma_{X_2}^2$ e la covarianza tra le due variabili aleatorie bidimensionali $\sigma_{X_1X_2}$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{X_1}^2 &= \varphi_{X_1}^2 - \mu_{X_1}^2 & \sigma_{X_2}^2 &= \varphi_{X_2}^2 - \mu_{X_2}^2 \\
\sigma_{X_1X_2} &= E[X_1X_2] - E[X_1]E[X_2] = \varphi_{X_1X_2} - \mu_{X_1X_2}
\end{aligned} \tag{4.61}$$

La covarianza fornisce una stima del legame tra le due variabili aleatorie bidimensionali, legame che può essere normalizzato nel coefficiente di correlazione ρ :

$$\rho = \frac{\sigma_{X_1X_2}}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} \tag{4.62}$$

Nel caso di una variabile aleatoria bidimensionale definita gaussiana o normale, tutti i cumulanti di ordine superiore al secondo debbono essere nulli; in tal caso, la densità di probabilità congiunta viene determinata note le medie marginali, le varianze marginali e la covarianza e si introducono i momenti e i cumulanti fino al secondo ordine, il vettore dei valori medi $\boldsymbol{\mu}_{X_2}$ e la matrice simmetrica di covarianza $\boldsymbol{\Sigma}_{X_2}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1[\mathbf{X}_2] &= \mathbf{m}_1[\mathbf{X}_2] = \mathbf{E}[\mathbf{X}_2] = \boldsymbol{\mu}_{X_2} = \begin{Bmatrix} \mu_{X_1} \\ \mu_{X_2} \end{Bmatrix} \\
\mathbf{m}_2[\mathbf{X}_2] &= \mathbf{E}[\mathbf{X}_2^2] = \boldsymbol{\varphi}_{X_2}^2
\end{aligned} \tag{4.63}$$

$$\mathbf{k}_2[\mathbf{X}_2] = \mathbf{E}\left[(\mathbf{X}_2 - \boldsymbol{\mu}_{X_2})^2\right] \mathbf{E}[\mathbf{X}_2^2] - \boldsymbol{\mu}_{X_2}^2 = \boldsymbol{\varphi}_{X_2}^2 - \boldsymbol{\mu}_{X_2}^2$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{X_2} = \mathbf{E}\left[(\mathbf{X}_2 - \boldsymbol{\mu}_{X_2})(\mathbf{X}_2 - \boldsymbol{\mu}_{X_2})^T\right] = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1X_2} \\ \sigma_{X_2X_1} & \sigma_{X_2}^2 \end{bmatrix} \tag{4.64}$$

Nel caso di variabili aleatorie multidimensionali aventi n componenti, i momenti e i cumulanti fino al secondo ordine e la matrice di covarianza generica assume la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1[\mathbf{X}_n] &= \mathbf{m}_1[\mathbf{X}_n] = \mathbf{E}[\mathbf{X}_n] = \boldsymbol{\mu}_{X_n} \\ \mathbf{m}_2[\mathbf{X}_n] &= \mathbf{E}[\mathbf{X}_n^2] = \boldsymbol{\varphi}_{X_n}^2 \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_2[\mathbf{X}_n] &= \mathbf{E}\left[(\mathbf{X}_n - \boldsymbol{\mu}_{X_n})^2\right] \mathbf{E}[\mathbf{X}_n^2] - \boldsymbol{\mu}_{X_n}^2 = \boldsymbol{\varphi}_{X_n}^2 - \boldsymbol{\mu}_{X_n}^2 \\ \boldsymbol{\Sigma}_{X_n} &= \mathbf{E}\left[(\mathbf{X}_n - \boldsymbol{\mu}_{X_n})(\mathbf{X}_n - \boldsymbol{\mu}_{X_n})^T\right] = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1 X_2} & \cdots & \sigma_{X_1 X_n} \\ \sigma_{X_2 X_1} & \sigma_{X_2}^2 & \cdots & \sigma_{X_2 X_n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \sigma_{X_n X_1} & \sigma_{X_n X_2} & \cdots & \sigma_{X_n}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.66)$$

Fino ad ora si è trattato di variabili aleatorie indipendenti; tuttavia, nel campo della Dinamica si affronta lo studio di fenomeni che dipendono dal tempo: una variabile aleatoria tempo-dipendente prende il nome di processo aleatorio ed è una funzione del tempo di osservazione. Dal processo aleatorio $X(t)$ è possibile estrarre, per ogni istante di tempo j , una variabile aleatoria X_j . Le variabili aleatorie estratte a diversi istanti possono essere raggruppate in un vettore che definisce la variabile aleatoria multidimensionale. Se tra due variabili aleatorie esiste una qualsiasi forma di dipendenza, esse si dicono correlate; nella Dinamica delle Strutture la funzione di correlazione assume importanza fondamentale per la definizione di processi aleatori gaussiani, insieme alla media ed alla varianza e, per due variabili aleatorie estratte dal processo in due istanti di tempo t_k e t_l , serve conoscere semplicemente:

$$\begin{aligned} \mu_X(t_k) &= E[X_k] \\ \varphi_X^2(t_k, t_l) &= E[X_k X_l] \\ R_X^2(t_k, t_l) &= E[X_k X_l] - E[X_k]E[X_l] \end{aligned} \quad (4.67)$$

Una categoria particolarmente importante di processi aleatori è quella dei processi stazionari, per i quali si dimostra che il valor medio è indipendente dal tempo e tutte le statistiche del secondo ordine non dipendono più da due istanti consecutivi t_i e t_{i+1} presi singolarmente ma dalla loro differenza τ , pertanto si ha:

$$\begin{aligned}\mu_X(t_i) &= \mu_X(t_{i+1}) = \mu_X \\ E[X(t_i)X(t_{i+1})] &= E[X(t_i)X(t_i + \tau)] \\ R_X^2(t_i, t_{i+1}) &= R_X^2(t_i, t_i + \tau) \equiv R_X^2(\tau)\end{aligned}\quad (4.68)$$

In cui $R_X(\tau)$ è nota come funzione di autocorrelazione. La correlazione tra la variabile aleatoria $X(t)$ e la variabile aleatoria al tempo $X(t + \tau)$ decresce al crescere di τ , pertanto si può assumere che R tende ad annullarsi per valori di $\tau \rightarrow \infty$ e sia invece massimo per $\tau = 0$, e pari alla varianza:

$$R_X^2(0) = E[X^2(t)] - (E[X(t)])^2 \equiv \sigma_X^2 = \varphi_X^2(\tau) - \mu_{X_1}^2 \quad (4.69)$$

Per un processo gaussiano stazionario $X(t)$, è possibile definire la densità spettrale di potenza $S_X(\omega)$ dalla quale si ricava la funzione di autocorrelazione grazie all'antitrasformata di Fourier, riportate nelle relazioni di Wiener-Kinchine (4.70).

$$S_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (4.70)$$

Per $\tau = 0$, valore in cui la funzione di autocorrelazione, come detto, è massima e pari alla varianza, si ottiene pertanto:

$$\sigma_X^2 = R_X^2(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) d\omega \quad (4.71)$$

Ovvero l'area della funzione densità spettrale di potenza $S_X(\omega)$ è pari alla varianza del processo aleatorio stazionario gaussiano (**Fig. 4.24**).

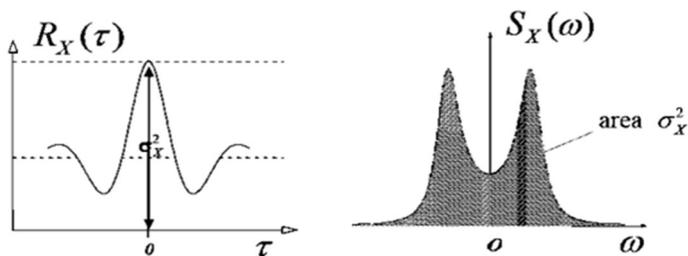


Fig. 4.24: funzione di autocorrelazione e densità spettrale di potenza

Se la densità spettrale di potenza è uguale per tutti i valori di frequenza, si è nel particolare caso di processo aleatorio bianco $W(t)$; la S_W si mantiene costante e si ricava essere proporzionale alla delta di Dirac:

$$S_X(\omega) = S_W = S_0 = \text{cost} \quad \forall \omega$$

$$R_X(\tau) = R_W(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_0 e^{-i\omega\tau} d\omega = S_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} d\omega = 2\pi S_W \delta(\omega) \quad (4.72)$$

Si riportano di seguito un campione di processo aleatorio bianco e le corrispondenti forme della funzione di autocorrelazione e la densità spettrale di potenza:

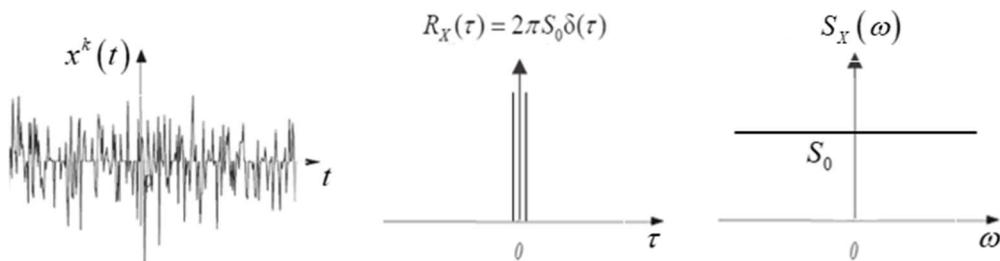


Fig. 4.25: campione, funzione di autocorrelazione e densità spettrale di potenza del processo aleatorio bianco

Il processo aleatorio bianco, così definito ovvero costante nel tempo, con aria sottesa infinita e indipendenza statistica tra ciò che succede in istanti diversi, è ovviamente un fenomeno matematico puramente astratto ed inesistente fisicamente; tuttavia, è di importanza fondamentale in Dinamica Aleatoria in quanto utilizzato per la trattazione della teoria dei filtri.

Ciò che è di interesse nell'ambito dell'ingegneria civile è caratterizzare il processo aleatorio della risposta della struttura, partendo dalla conoscenza delle caratteristiche aleatorie del processo forzante; tale lavoro è semplificato dall'assunzione che i processi aleatori di interesse possano essere considerati gaussiani, in modo tale da riuscire a caratterizzarli mediante la conoscenza di media e varianza o più in generale delle correlazioni fino al secondo ordine. Inoltre, avendo validità l'assioma secondo il quale la combinazione di processi aleatori gaussiani fornisce un processo gaussiano, sarà un processo gaussiano anche la risposta di un sistema lineare.

In ambito ingegneristico interessa osservare più di un processo aleatorio alla volta, come i processi spostamento e velocità della risposta della struttura oppure i processi forzante e risposta simultaneamente. Se, ad esempio, per i due processi aleatori $X(t)$ e $Y(t)$ si può definire una densità di probabilità congiunta, essi si dicono processi bivariati. Nel caso più generale si può avere un processo aleatorio multidimensionale multivariato ovvero formato da un vettore $\mathbf{X}(t, x, y, z)$ che racchiude più processi aleatori tra loro uniti da densità di probabilità congiunta (processi multivariati) e dipendenti da più variabili deterministiche (processi multidimensionali), anche se in questa sede si studiano i processi monodimensionali, dipendenti solo dal tempo. È di interesse lo studio di processi aleatori bivariati stazionari gaussiani che, per quanto detto sono definiti solo da media e varianza, pertanto si avranno le medie dei due processi aleatori componenti $X(t)$ e $Y(t)$ e la matrice di correlazione $\mathbf{R}_{XY}(\tau)$ formata da funzioni di correlazione diretta, coincidenti con le funzioni di autocorrelazione dei singoli processi $R_{XX}(\tau)$, $R_{YY}(\tau)$ che sono simmetriche rispetto all'asse $\tau = 0$, e dalle funzioni di autocorrelazione incrociata $R_{XY}(\tau)$, $R_{YX}(\tau)$, non simmetriche, pertanto per i processi bivariati la matrice $\mathbf{R}_{XY}(\tau)$ non è simmetrica. Per $\tau = 0$ si ricava sempre la matrice di covarianza Σ_{XY} .

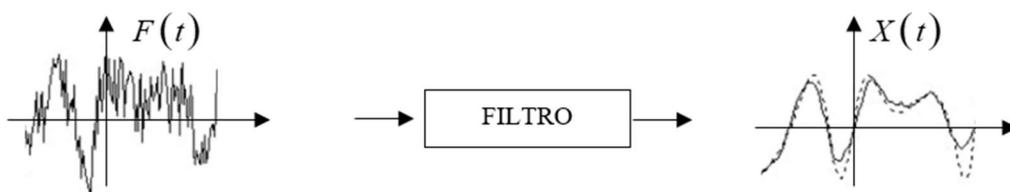
$$\begin{aligned}
\mu_X(t) &= \mu_X & \mu_Y(t) &= \mu_Y \\
R_X(\tau) &\equiv R_{XX}(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] - \mu_X^2 \\
R_Y(\tau) &\equiv R_{YY}(\tau) = E[Y(t)Y(t+\tau)] - \mu_Y^2 \\
R_{XY}(\tau) &\equiv E[X(t)Y(t+\tau)] - \mu_X\mu_Y \\
R_{YX}(\tau) &\equiv E[Y(t)X(t+\tau)] - \mu_Y\mu_X
\end{aligned} \tag{4.73}$$

$$\mathbf{R}_{XY}(\tau) = \begin{bmatrix} R_X(\tau) & R_{XY}(\tau) \\ R_{YX}(\tau) & R_Y(\tau) \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_{XY}(0) = \mathbf{\Sigma}_{XY} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{YX} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix} \tag{4.74}$$

Il processo aleatorio risposta di oscillatore elementare, in Dinamica Aleatoria, è un processo bivariato in cui si hanno il processo risposta in spostamento $X(t)$ ed il processo aleatorio velocità derivato $\dot{X}(t)$, il quale nel caso stazionario ha media nulla $\dot{\mu}_X = 0$ in quanto $\mu_X = \text{cost}$.

I fenomeni naturali, interpretati come processi aleatori, vengono modellati con processi aleatori bianchi filtrati ovvero come soluzioni di sistemi di equazioni differenziali lineari, in cui vi sono processi aleatori bianchi come termine noto. È usualmente sufficiente l'assunzione adottata, in quanto le normative nazionali e internazionali generalmente adottano l'assunzione che i fenomeni naturali quali vento e terremoti siano assimilabili a processi aleatori stazionari, aventi una determinata funzione densità spettrale di potenza e, nel caso del sisma, anche valor medio nullo.

La base del calcolo aleatorio è data, in qualsiasi ambito lo si applichi, dal voler valutare la risposta $X(t)$ ovvero l'output del sistema, per data forzante $F(t)$ di input; ciò che si ricava come risposta è l'input filtrato dal sistema, secondo la rappresentazione seguente:



Un processo aleatorio bianco filtrato, in dinamica aleatoria, è un processo aleatorio ottenuto risolvendo un sistema di equazioni differenziali forzate da un processo bianco. In tal modo, è possibile analizzare il sistema nel dominio del tempo per ottenere le statistiche della risposta anche nel caso in cui le strutture siano non lineari e le forzanti siano diverse da quella gaussiana (Muscolino, 2002). Grazie agli studi di Kanai (1957) e dell'idea di Tajimi (1960), che pensò di modellare l'accelerazione sismica come un processo aleatorio bianco filtrato, si è giunti a determinate forme per la densità spettrale di potenza, considerando che l'equazione del filtro sia quella di un oscillatore elementare che rappresenta il terreno compreso tra la struttura e l'ipocentro.

La densità spettrale di potenza di Tajimi-Kanai ha la seguente forma:

$$S_{\ddot{u}_g}(\omega) = \frac{(\omega_k^4 + 4\zeta_k^2 \omega_k^2 \omega^2) S_W}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_k^2 \omega_k^2 \omega^2} \equiv S_{TK}(\omega) \quad (4.75)$$

All'interno della quale si ha la densità spettrale di potenza del processo aleatorio bianco S_W , legata al picco massimo assoluto dell'accelerazione del terreno grazie alla relazione di Buchholdt (1997):

$$S_W = \frac{0.141 \zeta_k \ddot{u}_{g0}^2}{\omega_k \sqrt{(1 + 4\zeta_k^2)}} \quad (4.76)$$

Successivamente, Clough e Penzien hanno modificato la (4.75) in:

$$S_{\ddot{u}_g}(\omega) = S_{TK}(\omega) \frac{\omega^4}{(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta_p^2 \omega_p^2 \omega^2} \equiv S_{CP}(\omega) \quad (4.77)$$

Le pulsazioni ω_K, ω_P e i rapporti di smorzamento ζ_K, ζ_P derivano dall'analisi degli accelerogrammi registrati. Yeh e Wen, nel 1990, hanno fornito i valori dei parametri all'interno della (4.77) per tre famosi terremoti misurati nelle stazioni di El Centro, Taft e Mexico City:

STAZIONE	ω_K	ζ_K	ω_P	ζ_P	S_W
<i>El centro</i>	19.0	0.65	2.0	0.6	0.0029
<i>Taft</i>	20.0	0.65	1.0	0.5	0.0028
<i>Mexico City</i>	4.2	0.1	0.23	0.1	0.0033

(4.78)

Utilizzando il processo aleatorio forzante come bianco filtrato, è necessario definire le equazioni differenziali del filtro, che si aggiungono al sistema di equazioni differenziali che descrive il sistema in esame. Nel dominio del tempo, le equazioni differenziali del filtro di Clough e Penzien sono:

$$\begin{aligned} \ddot{U}_P(t) + 2\zeta_P\omega_P\dot{U}_P(t) + \omega_P^2U_P(t) &= \omega_K^2U_K(t) + 2\zeta_K\omega_K\dot{U}_K(t) \\ \ddot{U}_K(t) + 2\zeta_K\omega_K\dot{U}_K(t) + \omega_K^2U_K(t) &= -W(t) \end{aligned} \quad (4.79)$$

L'accelerazione alla base dell'oscillatore elementare che rappresenta il terreno viene soggetta pertanto a due filtri, K e P , e diventa:

$$\ddot{U}_g(t) = -\omega_P^2U_P(t) - 2\zeta_P\omega_P\dot{U}_P(t) + \omega_K^2U_K(t) + 2\zeta_K\omega_K\dot{U}_K(t) \quad (4.80)$$

Equazioni di governo strutture a più gradi di libertà con processi aleatori forzante multivariati gaussiani

Si consideri innanzitutto una struttura avente n gradi di libertà, per la quale è possibile scrivere l'equazione del moto costruendo le matrici delle masse, delle rigidezze e di dissipazione, rispettivamente $\mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{C}$. La struttura è forzata da un processo aleatorio multivariato, con condizioni iniziali assegnate e deterministiche, ovvero con probabilità di accadimento pari a 1:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{F}(t) \quad P[\mathbf{U}(t_0) = \mathbf{u}_0 \cap \dot{\mathbf{U}}(t_0) = \dot{\mathbf{u}}_0] \quad (4.81)$$

Nello spazio delle variabili di stato nodali, si riscrive il problema nella forma matriciale compatta:

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{D}_N \mathbf{Y}(t) + \mathbf{f}(t) \quad (4.82)$$

Nella dinamica classica, si utilizza la formulazione integrale per ricavare la risposta della struttura ed essa può essere applicata anche per calcolare il vettore valor medio e il vettore della matrice di correlazione. Tuttavia, in alcuni casi generici come nel caso di forzante non stazionaria, l'onere computazionale del metodo integrale cresce e si preferisce usualmente utilizzare la formulazione differenziale, la quale indaga come variano i momenti del primo e del secondo ordine. Nel caso stazionario, il calcolo delle quantità probabilistiche caratterizzanti il processo aleatorio si riduce alla soluzione di semplici equazioni algebriche.

Nel caso generico, le formulazioni differenziali che descrivono la variazione dei momenti del primo e del secondo ordine, per le proprietà dell'operatore media stocastica, sono:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E[\mathbf{Y}(t)] &= \dot{E}[\mathbf{Y}(t)] = E[\dot{\mathbf{Y}}(t)] \\ \frac{d}{dt} E[\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^T(t)] &= E[\dot{\mathbf{Y}}(t)\mathbf{Y}^T(t)] + E[\mathbf{Y}(t)\dot{\mathbf{Y}}^T(t)] \end{aligned} \quad (4.83)$$

Sostituendo in $\dot{\mathbf{Y}}(t)$ la (4.82), si ottiene per il momento del primo ordine:

$$E[\dot{\mathbf{Y}}(t)] = \mathbf{D}_N E[\mathbf{Y}(t)] + E[\mathbf{f}(t)] \quad (4.84)$$

Se il processo aleatorio forzante è un processo bianco a media nulla, il valor medio sarà nullo; se non è nullo ma solamente stazionario, il valor medio sarà costante e la sua derivata nulla, ovvero:

$$\boldsymbol{\mu}_Y(t) = E[\mathbf{Y}(t)] = \text{cost} \quad \rightarrow \quad \dot{E}[\mathbf{Y}(t)] = 0 \quad (4.85)$$

Sostituendo in $\dot{\mathbf{Y}}(t)$ della (4.83) la (4.82), si ottiene per il momento del secondo ordine:

$$\dot{E}[\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^T(t)] = E[(\mathbf{D}_N \mathbf{Y}(t) + \mathbf{f}(t))\mathbf{Y}^T(t)] + E[\mathbf{Y}(t)(\mathbf{D}_N \mathbf{Y}(t) + \mathbf{f}(t))^T] \quad (4.86)$$

$$\dot{E}[\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^T(t)] = E[(\mathbf{D}_N \mathbf{Y}(t) + \mathbf{f}(t))\mathbf{Y}^T(t)] + E[\mathbf{Y}(t)(\mathbf{D}_N \mathbf{Y}(t) + \mathbf{f}(t))^T] \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}[\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^T(t)] &= \mathbf{D}_N E[\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^T(t)] + E[\mathbf{f}(t)\mathbf{Y}^T(t)] + \\ &+ \mathbf{D}_N^T E[\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^T(t)] + E[\mathbf{Y}(t)\mathbf{f}^T(t)] \end{aligned} \quad (4.88)$$

La risposta in forma integrale in variabili di stato è classicamente nota essere:

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{D}_N(t-t_0)\mathbf{Y}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbf{D}_N(t-\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau \quad (4.89)$$

Nel caso di processo aleatorio stazionario multivariato gaussiano, ovvero il caso di interesse, la formulazione precedente si semplifica notevolmente e permette di ricavare facilmente la matrice di covarianza risolvendo equazioni algebriche.

Si ha che il processo aleatorio $\mathbf{Y}(t)$ è un vettore contenente i processi aleatori risposta in spostamento e velocità. Applicando l'operatore media stocastica al vettore processo aleatorio multivariato, si ottiene il vettore media:

$$\boldsymbol{\mu}_Y = E[\mathbf{Y}(t)] = \begin{bmatrix} E[\mathbf{U}(t)] \\ E[\dot{\mathbf{U}}(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_U \\ \boldsymbol{\mu}_{\dot{U}} \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

Il processo risposta è stazionario, pertanto $\boldsymbol{\mu}_U = \text{cost}$; segue che il valor medio del processo risposta velocità $\dot{\mathbf{U}}(t)$ è nullo $\boldsymbol{\mu}_{\dot{U}} = 0$. Mentre la matrice di correlazione del processo aleatorio multivariato è:

$$\mathbf{R}_{YY}(\tau) = E[\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^T(t+\tau)] - \boldsymbol{\mu}_Y \boldsymbol{\mu}_Y^T \quad (4.91)$$

È sempre valida la relazione secondo cui la funzione di correlazione in zero è pari alla matrice di covarianza che, per una struttura a n gradi di libertà,

considerando che ogni gdl è un processo aleatorio bivariato stazionario risposta spostamento e velocità, vale:

$$\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} = \mathbf{R}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}(0) = \begin{bmatrix} \sigma_{U_1}^2 & \cdots & \sigma_{U_1 U_n} & \sigma_{U_1 \dot{U}_1} & \cdots & \sigma_{U_1 \dot{U}_n} \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{U_n U_1} & \cdots & \sigma_{U_n}^2 & \sigma_{U_n \dot{U}_1} & \cdots & \sigma_{U_n \dot{U}_n} \\ \sigma_{\dot{U}_1 U_1} & \cdots & \cdots & \sigma_{\dot{U}_1}^2 & \cdots & \sigma_{\dot{U}_1 \dot{U}_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \sigma_{\dot{U}_n U_1} & \cdots & \cdots & \sigma_{\dot{U}_n \dot{U}_1} & \cdots & \sigma_{\dot{U}_n}^2 \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

Come detto, in Dinamica Aleatoria si utilizzano i filtri sul processo aleatorio forzante, ottenendo che il sistema venga forzato da un processo aleatorio bianco filtrato. Nel caso dei fenomeni naturali, le condizioni iniziali a partire dalle quali agisce la forzante, come nel caso del sisma, sono nulle e pertanto deterministiche: ne risulta nullo anche il valor medio della forzante e lo sarà anche il valor medio della risposta.

Se il valor medio è nullo, la matrice di covarianza della risposta è pari a:

$$\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} = \mathbf{R}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}(0) = E[\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^T(t)] \quad (4.93)$$

La $\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}$ è una matrice di quantità costanti, e pertanto la sua derivata sarà nulla.

Alla luce delle considerazioni fatte, la (4.88) si semplifica come segue:

$$\dot{\mathbf{\Sigma}}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} = \mathbf{D}_N \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} + \mathbf{D}_N^T \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} + E[\mathbf{f}(t)\mathbf{Y}^T(t)] + E[\mathbf{Y}(t)\mathbf{f}^T(t)] \quad (4.94)$$

Considerando la quantità $\mathbf{Y}(t)\mathbf{f}^T(t)$, dalla (4.89) si ha:

$$\mathbf{Y}(t)\mathbf{f}^T(t) = \mathbf{D}_N(t-t_0)\mathbf{Y}(t_0)\mathbf{f}^T(t) + \int_{t_0}^t \mathbf{D}_N(t-\tau)\mathbf{f}(\tau)\mathbf{f}^T(t)d\tau \quad (4.95)$$

Avendo condizioni iniziali $t_0 = 0$ deterministiche, la (4.95) si semplifica in:

$$\mathbf{Y}(t)\mathbf{f}^T(t) = \mathbf{D}_N(t)\mathbf{Y}(0)\mathbf{f}^T(t) + \int_0^t \mathbf{D}_N(t-\tau)\mathbf{f}(\tau)\mathbf{f}^T(t)d\tau \quad (4.96)$$

Le condizioni iniziali nel caso di sisma sono nulle, ovvero $\mathbf{Y}(0) = 0$; applicando l'operatore media stocastica alla (4.96) si ha:

$$E[\mathbf{Y}(t)\mathbf{f}^T(t)] = + \int_0^t \mathbf{D}_N(t-\tau) E[\mathbf{f}(\tau)\mathbf{f}^T(t)] d\tau \quad (4.97)$$

Trattandosi di un processo a media nulla, il termine $E[\mathbf{f}(\tau)\mathbf{f}^T(t)]$ è pari alla matrice di covarianza della forzante:

$$\Sigma_f(t, \tau) = E[\mathbf{f}(t)\mathbf{f}^T(\tau)] \quad (4.98)$$

Quindi i due termini che compaiono nella (4.94), tenendo conto della simmetria della matrice di covarianza, risultano essere:

$$E[\mathbf{f}(t)\mathbf{Y}^T(t)] = \int_0^t \mathbf{D}_N(t-\tau) E[\mathbf{f}(\tau)\mathbf{f}^T(t)] d\tau = \int_0^t \mathbf{D}_N(t-\tau) \Sigma_f(t, \tau) d\tau \quad (4.99)$$

$$E[\mathbf{Y}(t)\mathbf{f}^T(t)] = \int_0^t \mathbf{D}_N(t-\tau) \Sigma_f^T(t, \tau) d\tau$$

La (4.94) si riscrive come:

$$\dot{\Sigma}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} = \mathbf{D}_N \Sigma_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} + \mathbf{D}_N^T \Sigma_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} + \int_0^t \mathbf{D}_N(t-\tau) [\Sigma_f(t, \tau) + \Sigma_f^T(t, \tau)] d\tau \quad (4.100)$$

$$\dot{\Sigma}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} = \mathbf{D}_N \Sigma_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} + \mathbf{D}_N^T \Sigma_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} + \int_0^t \mathbf{D}_N(t-\tau) [2\Sigma_f(t, \tau)] d\tau \quad (4.101)$$

Nel caso di rumore bianco, richiamando la (4.72) si ha che:

$$\Sigma_f = \mathbf{R}_f(0) = 2\pi S_w \delta(\omega) \quad (4.102)$$

Dalla proprietà della delta di Dirac:

$$\int_a^b \delta(t-t_0) f(t) dt = \frac{1}{2} f(t_0) \quad \text{se } a = t_0 \quad (4.103)$$

In cui, tenendo conto delle proprietà della matrice di transizione:

$$f(t_0) = \mathbf{D}_N(t_0) = \mathbf{D}_N(0) = \mathbf{I} \quad (4.104)$$

La (4.101) si scrive come:

$$\dot{\Sigma}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} = \mathbf{D}_N \Sigma_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} + \mathbf{D}_N^T \Sigma_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} + 2 \int_0^t \mathbf{D}_N (t-\tau) 2\pi \mathbf{S}_W \delta(t-\tau) d\tau \quad (4.105)$$

$$\dot{\Sigma}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} = \mathbf{D}_N \Sigma_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} + \mathbf{D}_N^T \Sigma_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} + 2 \frac{1}{2} 2\pi \mathbf{S}_W \quad (4.106)$$

In cui $\dot{\Sigma}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} = 0$ perché, come detto, all'interno della matrice di covarianza vi sono quantità costanti. Si giunge infine alla formulazione del problema desiderata:

$$\mathbf{D}_N \Sigma_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} + \mathbf{D}_N^T \Sigma_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}} + \mathbf{D} = \mathbf{0} \quad (4.107)$$

In cui $\mathbf{D} = 2\pi \mathbf{S}_W$ è una matrice diagonale avente sulla diagonale valore $2\pi S_W$ in corrispondenza dei gradi di libertà forzati.

La matrice di covarianza del processo aleatorio risposta spostamento e velocità $\Sigma_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}$ si trova matematicamente in forma esatta risolvendo l'equazione di Lyapunov, corrispondente per forma alla scrittura della (4.107).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Abrahamson, A. L. (1973). The response of periodic structures to aero-acoustic pressures, with particular reference to aircraft skin-rib spar structures (Doctoral dissertation, University of Southampton).

Alexander, N. A., & Schilder, F. (2009). Exploring the performance of a nonlinear tuned mass damper. *Journal of Sound and Vibration*, 319(1-2), 445-462.

Alujević, N., Čakmak, D., Wolf, H., & Jokić, M. (2018). Passive and active vibration isolation systems using inerter. *Journal of Sound and Vibration*, 418, 163-183.

Anagnostopoulos, S. A., & Spiliopoulos, K. V. (1992). An investigation of earthquake induced pounding between adjacent buildings. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 21(4), 289-302.

Anh, N. D., Nguyen, N. X., & Hoa, L. T. (2013). Design of three-element dynamic vibration absorber for damped linear structures. *Journal of Sound and Vibration*, 332(19), 4482-4495.

Asai, T., & Sugiura, K. (2021). Numerical evaluation of a two-body point absorber wave energy converter with a tuned inerter. *Renewable energy*, 171, 217-226.

Asai, T., *Structural Control Strategies for Earthquake Response Reduction of Buildings*, 2014.Ph.D. Thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, Civil and Environmental Engineering. Available online: <http://hdl.handle.net/2142/49571>.

Banerji, P., Murudi, M., Shah, A. H., & Popplewell, N. (2000). Tuned liquid dampers for controlling earthquake response of structures. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 29(5), 587-602.

Bao, J., Shi, Z., & Xiang, H. (2012). Dynamic responses of a structure with periodic foundations. *Journal of Engineering Mechanics*, 138(7), 761-769.

Brun, M., Movchan, A. B., & Jones, I. S. (2013). Phononic band gap systems in structural mechanics: finite slender elastic structures and infinite periodic waveguides. *Journal of Vibration and Acoustics*, 135(4), 041013.

Buchholdt, H. A., & Nejad, S. E. M. (1997). *Structural dynamics for engineers*. London: Thomas Telford.

Cao, L., & Li, C. (2019). Tuned tandem mass dampers-inerters with broadband high effectiveness for structures under white noise base excitations. *Structural Control and Health Monitoring*, 26(4), e2319.

Cao, L., Li, C., & Chen, X. (2020). Performance of multiple tuned mass dampers-inerters for structures under harmonic ground acceleration. *Smart Structures and Systems, An International Journal*, 26(1), 49-61.

Casalotti, A., El-Borgi, S., & Lacarbonara, W. (2018). Metamaterial beam with embedded nonlinear vibration absorbers. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 98, 32-42.

Castanier, M. P., Ottarsson, G., & Pierre, C. (1997). A reduced order modeling technique for mistuned bladed disks. *Journal of Vibration and Acoustics*, 119(3), 439-447.

Chatterjee, T., Karličić, D., Adhikari, S., & Friswell, M. I. (2021). Wave propagation in randomly parameterized 2D lattices via machine learning. *Composite Structures*, 275, 114386.

Chen, J. S., Sharma, B., & Sun, C. T. (2011). Dynamic behaviour of sandwich structure containing spring-mass resonators. *Composite Structures*, 93(8), 2120-2125.

Chen, M. Z., Papageorgiou, C., Scheibe, F., Wang, F. C., & Smith, M. C. (2009). The missing mechanical circuit element. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, 9(1), 10-26.

Cheng, F. Y., Jiang, H., & Lou, K. (2008). *Smart structures: innovative systems for seismic response control*. CRC press.

Chung, L. L., Wu, L. Y., Lien, K. H., Chen, H. H., & Huang, H. H. (2013). Optimal design of friction pendulum tuned mass damper with varying friction coefficient. *Structural control and health monitoring*, 20(4), 544-559.

Cimellaro, G. P., & Marasco, S. (2018). *Introduction to dynamics of structures and earthquake engineering (Vol. 45)*. Springer.

Clough, R. W., & Penzien, J. (1993). *Dynamics of Structures*, 2nd edon. New York: McGraw-Hill.

Cremer, L., & Leilich, H. O. (1953). Zur theorie der biegekettenteiler. *Archiv der elektrischen Übertragung*, 7, 261-270.

Dai, J., Xu, Z. D., & Gai, P. P. (2019). Tuned mass-damper-inerter control of wind-induced vibration of flexible structures based on inerter location. *Engineering Structures*, 199, 109585.

Dai, J., Xu, Z. D., & Gai, P. P. (2019). Tuned mass-damper-inerter control of wind-induced vibration of flexible structures based on inerter location. *Engineering Structures*, 199, 109585.

Dai, J., Xu, Z. D., Gai, P. P., & Hu, Z. W. (2021). Optimal design of tuned mass damper inerter with a Maxwell element for mitigating the vortex-induced vibration in bridges. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 148, 107180.

Dai, J., Xu, Z. D., Gai, P. P., & Hu, Z. W. (2021). Optimal design of tuned mass damper inerter with a Maxwell element for mitigating the vortex-induced vibration in bridges. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 148, 107180.

Das, A. K., & Dey, S. S. (1992). Effects of tuned mass dampers on random response of bridges. *Computers & structures*, 43(4), 745-750.

De Angelis, M., Giaralis, A., Petrini, F., & Pietrosanti, D. (2019). Optimal tuning and assessment of inertial dampers with grounded inerter for vibration control of seismically excited base-isolated systems. *Engineering Structures*, 196, 109250.

De Domenico, D., & Ricciardi, G. (2018). An enhanced base isolation system equipped with optimal tuned mass damper inerter (TMDI). *Earthquake engineering & structural dynamics*, 47(5), 1169-1192.

De Domenico, D., & Ricciardi, G. (2018). Earthquake-resilient design of base isolated buildings with TMD at basement: Application to a case study. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 113, 503-521.

De Domenico, D., & Ricciardi, G. (2018). Improving the dynamic performance of base-isolated structures via tuned mass damper and inerter devices: A comparative study. *Structural Control and Health Monitoring*, 25(10), e2234.

De Domenico, D., & Ricciardi, G. (2018). Optimal design and seismic performance of tuned mass damper inerter (TMDI) for structures with nonlinear base isolation systems. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 47(12), 2539-2560.

De Domenico, D., Deastra, P., Ricciardi, G., Sims, N. D., & Wagg, D. J. (2019). Novel fluid inerter based tuned mass dampers for optimised structural control of base-isolated buildings. *Journal of the Franklin Institute*, 356(14), 7626-7649.

De Domenico, D., Qiao, H., Wang, Q., Zhu, Z., & Marano, G. (2020). Optimal design and seismic performance of Multi-Tuned Mass Damper Inerter (MTMDI) applied to adjacent high-rise buildings. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, 29(14), e1781.

De Domenico, D., Ricciardi, G., Infanti, S., & Benzoni, G. (2019). Frictional heating in double curved surface sliders and its effects on the hysteretic behavior: An experimental study. *Frontiers in Built Environment*, 5, 74.

Delis, E., Tokas, C., Madani, M., & Thompson, K. J. (1997). Analytical studies for seismic isolation in highway bridges. In *Proceedings of Structures Congress XV* (Vol. 2, pp. 1471-1478).

Di Paola, M., Muscolino, G., "Picco massimo della risposta di strutture soggette a forzanti aleatorie", *Atti XI Congresso nazionale AIMETA*, Trento, 319-324.

Ding, H., & Ji, J. C. (2023). Vibration control of fluid-conveying pipes: a state-of-the-art review. *Applied Mathematics and Mechanics*, 44(9), 1423-1456.

Ding, H., Ji, J., & Chen, L. Q. (2019). Nonlinear vibration isolation for fluid-conveying pipes using quasi-zero stiffness characteristics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 121, 675-688.

Domizio, M., Garrido, H., & Ambrosini, D. (2022). Single and multiple TMD optimization to control seismic response of nonlinear structures. *Engineering Structures*, 252, 113667.

Dong, X., Liu, Y., & Chen, M. Z. (2015, July). Application of inerter to aircraft landing gear suspension. In 2015 34th Chinese Control Conference (CCC) (pp. 2066-2071). IEEE.

Ewins, D. J. (1973). Vibration characteristics of bladed disc assemblies. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 15(3), 165-186.

Fan, X., Zhu, C. A., Mao, X. Y., & Ding, H. (2023). Resonance regulation on a hydraulic pipe via boundary excitations. *International Journal of Mechanical Sciences*, 252, 108375.

Fernandes, R., El-Borgi, S., Yazbeck, R., Boyd, J. G., & Lagoudas, D. C. (2022). Non-dimensional analysis of the bandgap formation in a locally resonant metamaterial pipe conveying fluid. *Applied Mathematical Modelling*, 106, 241-258.

Fisco, N. R., & Adeli, H. (2011). Smart structures: part I—active and semi-active control. *Scientia Iranica*, 18(3), 275-284.

Fisco, N. R., & Adeli, H. (2011). Smart structures: part I—active and semi-active control. *Scientia Iranica*, 18(3), 275-284.

Garrido, H., Curadelli, O., & Ambrosini, D. (2013). Improvement of tuned mass damper by using rotational inertia through tuned viscous mass damper. *Engineering Structures*, 56, 2149-2153.

García, V. J., Duque, E. P., Inaudi, J. A., Márquez, C. O., Mera, J. D., & Rios, A. C. (2021). Pendulum tuned mass damper: optimization and performance assessment in structures with elastoplastic behavior. *Heliyon*, 7(6).

Gerges, R. R., & Vickery, B. J. (2005). Optimum design of pendulum-type tuned mass dampers. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, 14(4), 353-368.

Ghobarah, A., & Ali, H. M. (1988, August). Design of base-isolated highway bridges. In *Proceedings of Ninth World Conference on Earthquake Engineering*.

Giaralis, A., & Petrini, F. (2017). Wind-induced vibration mitigation in tall buildings using the tuned mass-damper-inerter. *Journal of Structural Engineering*, 143(9), 04017127.

Giaralis, A., & Taflanidis, A. A. (2018). Optimal tuned mass-damper-inerter (TMDI) design for seismically excited MDOF structures with model uncertainties based on reliability criteria. *Structural Control and Health Monitoring*, 25(2), e2082.

Gonzalez-Buelga, A., Clare, L. R., Neild, S. A., Burrow, S. G., & Inman, D. J. (2015). An electromagnetic vibration absorber with harvesting and tuning capabilities. *Structural Control and Health Monitoring*, 22(11), 1359-1372.

Griffin, J. H., & Hoosac, T. M. (1984). Model development and statistical investigation of turbine blade mistuning. *ASME, Transactions, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 106, 204-210.

Gu, M., & Xiang, H. (1992). Optimization of TMD for suppressing buffeting response of long-span bridges. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 42(1-3), 1383-1392.

Guo, Y., Zhu, B., & Li, Y. (2022). Nonlinear dynamics of fluid-conveying composite pipes subjected to time-varying axial tension in sub-and super-critical regimes. *Applied Mathematical Modelling*, 101, 632-653.

Hajarolasvadi, S., & Elbanna, A. E. (2019). Dynamics of metamaterial beams consisting of periodically-coupled parallel flexural elements: A theoretical study. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 52(31), 315101.

Hao, M. Y., Ding, H., Mao, X. Y., & Chen, L. Q. (2023). Stability and nonlinear response analysis of parametric vibration for elastically constrained pipes conveying pulsating fluid. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 36(2), 230-240.

Hashimoto, T., Fujita, K., Tsuji, M., & Takewaki, I. (2015). Innovative base-isolated building with large mass-ratio TMD at basement for greater earthquake resilience. *Future Cities and Environment*, 1(1), 1-19.

Henneberg, J., Nieto, J. G., Sepahvand, K., Gerlach, A., Cebulla, H., & Marburg, S. (2020). Periodically arranged acoustic metamaterial in industrial applications: The need for uncertainty quantification. *Applied Acoustics*, 157, 107026.

Hoang, N., Fujino, Y., & Warnitchai, P. (2008). Optimal tuned mass damper for seismic applications and practical design formulas. *Engineering structures*, 30(3), 707-715.

Hoang, N., & Warnitchai, P. (2005). Design of multiple tuned mass dampers by using a numerical optimizer. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 34(2), 125-144.

Hu, B., Zhang, Z., Yu, D., Liu, J., & Zhu, F. (2020). Broadband bandgap and shock vibration properties of acoustic metamaterial fluid-filled pipes. *Journal of Applied Physics*, 128(20).

Hu, G., Tang, L., & Das, R. (2018). Internally coupled metamaterial beam for simultaneous vibration suppression and low frequency energy harvesting. *Journal of Applied Physics*, 123(5).

Hu, Y. J., & Zhu, W. (2018). Vibration analysis of a fluid-conveying curved pipe with an arbitrary undeformed configuration. *Applied Mathematical Modelling*, 64, 624-642.

Hu, Y., & Chen, M. Z. (2015). Performance evaluation for inerter-based dynamic vibration absorbers. *International Journal of Mechanical Sciences*, 99, 297-307.

Hu, Y., Chen, M. Z., Shu, Z., & Huang, L. (2015). Analysis and optimisation for inerter-based isolators via fixed-point theory and algebraic solution. *Journal of sound and vibration*, 346, 17-36.

Hussein, M. I., Leamy, M. J., & Ruzzene, M. (2014). Dynamics of phononic materials and structures: Historical origins, recent progress, and future outlook. *Applied Mechanics Reviews*, 66(4), 040802.

Ibrahim, R. A. (2010). Overview of mechanics of pipes conveying fluids—Part I: Fundamental studies.

Ibrahim, R. A. (2011). Mechanics of pipes conveying fluids—part II: applications and fluidelastic problems.

Igusa, T., & Xu, K. (1994). Vibration control using multiple tuned mass dampers. *Journal of sound and vibration*, 175(4), 491-503.

Ikago, K., Saito, K., & Inoue, N. (2012). Seismic control of single-degree-of-freedom structure using tuned viscous mass damper. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 41(3), 453-474.

Iqbal, M., Kumar, A., Jaya, M. M., & Bursi, O. S. (2022). Vibration control of periodically supported pipes employing optimally designed dampers. *International Journal of Mechanical Sciences*, 234, 107684.

Iqbal, M., Kumar, A., Murugan Jaya, M., & Bursi, O. S. (2021). Flexural band gaps and vibration control of a periodic railway track. *Scientific Reports*, 11(1), 18145.

Jangid, R. S., & Banerji, P. (1995). Seismic response of bridges with non-linear supports. In 2nd Int. Conf. on Seismology and Earthquake Engineering (pp. 561-568).

Jankowski, R., Wilde, K., & Fujino, Y. (1998). Pounding of superstructure segments in isolated elevated bridge during earthquakes. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 27(5), 487-502.

Jensen, J. S. (2003). Phononic band gaps and vibrations in one-and two-dimensional mass-spring structures. *Journal of sound and Vibration*, 266(5), 1053-1078

Ji, J. C., & Zhang, N. (2010). Suppression of the primary resonance vibrations of a forced nonlinear system using a dynamic vibration absorber. *Journal of Sound and Vibration*, 329(11), 2044-2056.

Jin, X., Chen, M. Z. Q., & Huang, Z. (2019). Suppressing random response of a regular structure by an inerter-based dynamic vibration absorber. *Journal of Vibration and Acoustics*, 141(4), 041004.

John, E. D., & Wagg, D. J. (2019). Design and testing of a frictionless mechanical inerter device using living-hinges. *Journal of the Franklin Institute*, 356(14), 7650-7668.

Kanai, K. (1957). Semi-empirical formula for the seismic characteristics of the ground. *地震研彙報*, 35, 309-325.

Kang, M. G. (2000). The influence of rotary inertia of concentrated masses on the natural vibrations of fluid-conveying pipes. *Journal of Sound and Vibration*, 1(238), 179-187.

Karcanias, N. (2008). Structure evolving systems and control in integrated design. *Annual reviews in Control*, 32(2), 161-182.

Kaveh, A., Fahimi Farzam, M., & Hojat Jalali, H. (2020). Statistical seismic performance assessment of tuned mass damper inerter. *Structural Control and Health Monitoring*, 27(10), e2602.

Kim, H. S., Chang, C., & Kang, J. W. (2015). Control performance evaluation of semi-active tmd subjected to various types of loads. *International Journal of Steel Structures*, 15, 581-594.

Kim, J. M., Feng, M. Q., & Shinozuka, M. (2000). Energy dissipating restrainers for highway bridges. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 19(1), 65-69.

Koo, G. H., & Park, Y. S. (1996). Vibration analysis of a 3-dimensional piping system conveying fluid by wave approach. *International journal of pressure vessels and piping*, 67(3), 249-256.

Koo, G. H., & Park, Y. S. (1998). Vibration reduction by using periodic supports in a piping system. *Journal of Sound and Vibration*, 210(1), 53-68.

Koo, J. H., Shukla, A., & Ahmadian, M. (2008). Dynamic performance analysis of non-linear tuned vibration absorbers. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 13(9), 1929-1937.

Krenk, S. (2019). Resonant inerter based vibration absorbers on flexible structures. *Journal of the Franklin Institute*, 356(14), 7704-7730.

Kumar, P., Jangid, R. S., & Reddy, G. R. (2016). Comparative performance of passive devices for piping system under seismic excitation. *Nuclear Engineering and Design*, 298, 121-134.

Kunde, M. C., & Jangid, R. S. (2003). Seismic behavior of isolated bridges: A-state-of-the-art review. *Electronic Journal of Structural Engineering*, 3, 140-170.

Kwag, S., Eem, S., Kwak, J., Lee, H., Oh, J., & Koo, G. H. (2021). Mitigation of seismic responses of actual nuclear piping by a newly developed tuned mass damper device. *Nuclear Engineering and Technology*, 53(8), 2728-2745.

Lazar, I. F., Neild, S. A., & Wagg, D. J. (2014). Using an inerter-based device for structural vibration suppression. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 43(8), 1129-1147.

Lazar, I. F., Neild, S. A., & Wagg, D. J. (2016). Vibration suppression of cables using tuned inerter dampers. *Engineering Structures*, 122, 62-71.

Leung, A. Y., Zhang, H., Cheng, C. C., & Lee, Y. Y. (2008). Particle swarm optimization of TMD by non-stationary base excitation during earthquake. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 37(9), 1223-1246.

Lewandowski, R., & Grazymislawska, J. (2003, September). Dynamic behavior of composite mass damper for control of wind-excited vibration. In *AMAS workshop on smart materials and structures* (pp. 131-140).

Li, B. H., Gao, H. S., Zhai, H. B., Liu, Y. S., & Yue, Z. F. (2011). Free vibration analysis of multi-span pipe conveying fluid with dynamic stiffness method. *Nuclear Engineering and Design*, 241(3), 666-671.

Li, C. (2006). Performance of dual-layer multiple tuned mass dampers for structures under ground excitations. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 6(04), 541-557.

Li, C., & Liu, Y. (2003). Optimum multiple tuned mass dampers for structures under the ground acceleration based on the uniform distribution of system parameters. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 32(5), 671-690.

Li, C., & Zhu, B. (2006). Estimating double tuned mass dampers for structures under ground acceleration using a novel optimum criterion. *Journal of Sound and Vibration*, 298(1-2), 280-297.

Li, H. N., & Ni, X. L. (2007). Optimization of non-uniformly distributed multiple tuned mass damper. *Journal of Sound and Vibration*, 308(1-2), 80-97.

Li, Y. D., & Yang, Y. R. (2014). Forced vibration of pipe conveying fluid by the Green function method. *Archive of Applied Mechanics*, 84, 1811-1823.

Li, Y., Jiang, J. Z., & Neild, S. (2017). Inerter-based configurations for main-landing-gear shimmy suppression. *Journal of Aircraft*, 54(2), 684-693.

Lin, Y. Y., Cheng, C. M., & Lee, C. H. (2000). A tuned mass damper for suppressing the coupled flexural and torsional buffeting response of long-span bridges. *Engineering structures*, 22(9), 1195-1204.

Liu, C., Chen, L., Lee, H. P., Yang, Y., & Zhang, X. (2022). A review of the inerter and inerter-based vibration isolation: theory, devices, and applications. *Journal of the Franklin Institute*.

Liu, E., Wang, X., Zhao, W., Su, Z., & Chen, Q. (2020). Analysis and research on pipeline vibration of a natural gas compressor station and vibration reduction measures. *Energy & Fuels*, 35(1), 479-492.

Liu, M., Wang, Z., Zhou, Z., Qu, Y., Yu, Z., Wei, Q., & Lu, L. (2018). Vibration response of multi-span fluid-conveying pipe with multiple accessories under complex boundary conditions. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 72, 41-56.

Ma, R., Bi, K., & Hao, H. (2021). Inerter-based structural vibration control: A state-of-the-art review. *Engineering Structures*, 243, 112655.

Mahin, S. A. (1993). A simplified preliminary design approach for base isolated bridges. In *2nd US–Japan Workshop on Earthquake protective systems for bridges* (pp. 311-320).

Makris, N., & Moghimi, G. (2019). Displacements and forces in structures with inerters when subjected to earthquakes. *Journal of Structural Engineering*, 145(2), 04018260.

Manikanahally, D. N., & Crocker, M. J. (1991). Vibration absorbers for hysterically damped mass-loaded beams.

Mao, X. Y., Shu, S., Fan, X., Ding, H., & Chen, L. Q. (2021). An approximate method for pipes conveying fluid with strong boundaries. *Journal of Sound and Vibration*, 505, 116157.

Mao, X. Y., Sun, J. Q., Ding, H., & Chen, L. Q. (2020). An approximate method for one-dimensional structures with strong nonlinear and nonhomogenous boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 469, 115128.

Maragakis, E., & Saiidi, M. (1993). Development and application of simple analytical models of lead-rubber base isolated bridges. In *Proc. of the Second US-Japan Workshop on Earthquake Protective Systems for Bridges* (pp. 275-284).

Marian, L., & Giaralis, A. (2014). Optimal design of a novel tuned mass-damper-inerter (TMDI) passive vibration control configuration for stochastically support-excited structural systems. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 38, 156-164.

Masnata, C., Di Matteo, A., Adam, C., & Pirrotta, A. (2021). Assessment of the tuned mass damper inerter for seismic response control of base-isolated structures. *Structural Control and Health Monitoring*, 28(2), e2665.

Mayes, R. L. (1996). Seismic isolation of bridges using elastomeric isolation systems. In *Building an International Community of Structural Engineers* (pp. 33-40). ASCE.

Mayes, R. L., Buckle, I. G., Kelly, T. E., & Jones, L. R. (1992). AASHTO seismic isolation design requirements for highway bridges. *Journal of Structural Engineering*, 118(1), 284-304.

Mead, D. (1973). A general theory of harmonic wave propagation in linear periodic systems with multiple coupling. *Journal of Sound and Vibration*, 27(2), 235-260.

Mencik, J. M., & Duhamel, D. (2016). A wave finite element-based approach for the modeling of periodic structures with local perturbations. *Finite Elements in Analysis and Design*, 121, 40-51.

Mondal, J., Nimmala, H., Abdulla, S., & Tafreshi, R. (2014, August). Tuned liquid damper. In *Proceedings of the 3rd International Conference on Mechanical Engineering and Mechatronics* (No. 68).

Murugan Jaya, M., Ceravolo, R., Matta, E., & Zanotti Fragonara, L. (2018, July). A resonating lattice TMD to reduce pipeline vibrations. In *Pressure Vessels and Piping Conference* (Vol. 51715, p. V008T08A032). American Society of Mechanical Engineers.

- Muscolino, G. (2001). *Dinamica delle strutture*. McGraw-Hill.
- Nemat-Nasser, S. (1972). General variational methods for waves in elastic composites. *Journal of Elasticity*, 2(2), 73-90.
- Nishimura, I., Yamada, T., Sakamoto, M., & Kobori, T. (1998). Control performance of active-passive composite tuned mass damper. *Smart Materials and Structures*, 7(5), 637.
- Oliva, M., Barone, G., Iacono, F. L., & Navarra, G. (2020). Nonlinear energy sink and Eurocode 8: An optimal design approach based on elastic response spectra. *Engineering Structures*, 221, 111020.
- Pai, P. F. (2010). Metamaterial-based broadband elastic wave absorber. *Journal of intelligent material systems and structures*, 21(5), 517-528.
- Paidoussis, M. P. (1998). *Fluid-structure interactions: slender structures and axial flow* (Vol. 1). Academic press by Elsevier. Second Edition, 2014.
- Paidoussis, M. P., & Issid, N. T. (1974). Dynamic stability of pipes conveying fluid. *Journal of sound and vibration*, 33(3), 267-294.
- Palacios Quiñonero, F., Rubió Masegú, J., Rossell, J. M., & Karimi, H. R. (2014). Recent advances in static output-feedback controller design with applications to vibration control of large structures. *Modeling Identification and Control*, 35(3), 169-190.
- Palacios-Quíñonero, F., Rubió-Masegú, J., Rossell, J. M., & Karimi, H. R. (2019). Design of inerter-based multi-actuator systems for vibration control of adjacent structures. *Journal of the Franklin Institute*, 356(14), 7785-7809.
- Palazzo, B., Castaldo, P., & Della Vecchia, P. (2014). Seismic reliability of base-isolated structures with friction pendulum isolators (FPS). In *2nd European*

conference on earthquake engineering and seismology, Istanbul August (pp. 25-29).

Papageorgiou, C., Houghton, N. E., & Smith, M. C. (2009). Experimental testing and analysis of inerter devices.

Parvin, A., & Ma, Z. (2001). The use of helical spring and fluid damper isolation systems for bridge structures subjected to vertical ground acceleration. *Electronic Journal of Structural Engineering*, 1(2), 98-110.

Patil, S. J., & Reddy, G. R. (2012). State of art review-base isolation systems for structures. *International journal of emerging technology and advanced engineering*, 2(7), 438-453.

Peixin, G. A. O., Tao, Y. U., Zhang, Y., Jiao, W. A. N. G., & Jingyu, Z. H. A. I. (2021). Vibration analysis and control technologies of hydraulic pipeline system in aircraft: A review. *Chinese Journal of Aeronautics*, 34(4), 83-114.

Petrini, F., Giaralis, A., & Wang, Z. (2020). Optimal tuned mass-damper-inerter (TMDI) design in wind-excited tall buildings for occupants' comfort serviceability performance and energy harvesting. *Engineering Structures*, 204, 109904.

Pierre, J. W., Trudnowski, D., Donnelly, M., Zhou, N., Tuffner, F. K., & Dosiek, L. (2012). Overview of system identification for power systems from measured responses. *IFAC Proceedings Volumes*, 45(16), 989-1000.

Pietrosanti, D., De Angelis, M., & Basili, M. (2020). A generalized 2-DOF model for optimal design of MDOF structures controlled by Tuned Mass Damper Inerter (TMDI). *International Journal of Mechanical Sciences*, 185, 105849.

Pietrosanti, D., De Angelis, M., & Giaralis, A. (2020). Experimental study and numerical modeling of nonlinear dynamic response of SDOF system equipped with tuned mass damper inerter (TMDI) tested on shaking table under harmonic excitation. *International Journal of Mechanical Sciences*, 184, 105762.

Pourzeynali, S., & Datta, T. K. (2002). Control of flutter of suspension bridge deck using TMD. *Wind & structures*, 5(5), 407-422.

Rahimi, F., Aghayari, R., & Samali, B. (2020). Application of tuned mass dampers for structural vibration control: a state-of-the-art review. *Civil Engineering Journal*, 1622-1651.

Ren, M. Z. (2001). A variant design of the dynamic vibration absorber. *Journal of Sound Vibration*, 245(4), 762-770.

Rüdinger, F. (2006). Tuned mass damper with fractional derivative damping. *Engineering Structures*, 28(13), 1774-1779.

Ruiz, R., Taflanidis, A. A., Giaralis, A., & Lopez-Garcia, D. (2018). Risk-informed optimization of the tuned mass-damper-inerter (TMDI) for the seismic protection of multi-storey building structures. *Engineering Structures*, 177, 836-850.

Rustighi, E., Brennan, M. J., & Mace, B. R. (2005). Real-time control of a shape memory alloy adaptive tuned vibration absorber. *Smart Materials and Structures*, 14(6), 1184.

Santoro, R., Mazzeo, M., & Failla, G. (2023). A computational framework for uncertain locally resonant metamaterial structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 190, 110094.

Sarkar, S., & Fitzgerald, B. (2020). Vibration control of spar-type floating offshore wind turbine towers using a tuned mass-damper-inerter. *Structural Control and Health Monitoring*, 27(1), e2471.

Sarkar, S., & Fitzgerald, B. (2020). Vibration control of spar-type floating offshore wind turbine towers using a tuned mass-damper-inerter. *Structural Control and Health Monitoring*, 27(1), e2471.

Shen, W., Niyitangamahoro, A., Feng, Z., & Zhu, H. (2019). Tuned inerter dampers for civil structures subjected to earthquake ground motions: optimum design and seismic performance. *Engineering Structures*, 198, 109470.

Smith, M. C. (2002). Synthesis of mechanical networks: the inerter. *IEEE Transactions on automatic control*, 47(10), 1648-1662.

Smith, M. C. (2020). The inerter: a retrospective. *Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems*, 3, 361-391.

Soong, T. T. (1988). State-of-the-art review: active structural control in civil engineering. *Engineering Structures*, 10(2), 74-84.

Stăncioiu, D., & Ouyang, H. (2012). Structural modification formula and iterative design method using multiple tuned mass dampers for structures subjected to moving loads. *Mechanical systems and signal processing*, 28, 542-560.

Sugino, C., Xia, Y., Leadenham, S., Ruzzene, M., & Erturk, A. (2017). A general theory for bandgap estimation in locally resonant metastructures. *Journal of Sound and Vibration*, 406, 104-123.

Sugiura, K., Sawada, R., Nemoto, Y., Haraguchi, R., & Asai, T. (2020). Wave flume testing of an oscillating-body wave energy converter with a tuned inerter. *Applied Ocean Research*, 98, 102127.

Sugiura, K., Sawada, R., Nemoto, Y., Haraguchi, R., & Asai, T. (2020). Wave flume testing of an oscillating-body wave energy converter with a tuned inerter. *Applied Ocean Research*, 98, 102127.

Sun, C. T., Achenbach, J. D., & Herrmann, G. (1968). Time-harmonic waves in a stratified medium propagating in the direction of the layering.

Sun, L., Hong, D., & Chen, L. (2017). Cables interconnected with tuned inerter damper for vibration mitigation. *Engineering Structures*, 151, 57-67.

Suresh, L., & Mini, K. M. (2019). Effect of multiple tuned mass dampers for vibration control in high-rise buildings. *Practice Periodical on Structural Design and Construction*, 24(4), 04019031.

Symans, M. D., & Constantinou, M. C. (1999). Semi-active control systems for seismic protection of structures: a state-of-the-art review. *Engineering structures*, 21(6), 469-487.

Taflanidis, A. A., Giaralis, A., & Patsialis, D. (2019). Multi-objective optimal design of inerter-based vibration absorbers for earthquake protection of multi-storey building structures. *Journal of the Franklin Institute*, 356(14), 7754-7784.

Tajimi, H. (1960). A statistical method of determining the maximum response of a building structure during an earthquake. In *Proc. of the 2nd World Conference on Earthquake Engineering*, Tokyo, Japan, 1960 (pp. 781-797).

Takewaki, I. (2000). Soil-structure random response reduction via TMD-VD simultaneous use. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190(5-7), 677-690.

Talbot, J. P., & Hunt, H. E. M. (2003). A computationally efficient piled-foundation model for studying the effects of ground-borne vibration on buildings.

Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 217(9), 975-989.

Taniguchi, T., Der Kiureghian, A., & Melkumyan, M. (2008). Effect of tuned mass damper on displacement demand of base-isolated structures. *Engineering Structures*, 30(12), 3478-3488.

Tsai, H. C. (1995). The effect of tuned-mass dampers on the seismic response of base-isolated structures. *International journal of solids and structures*, 32(8-9), 1195-1210.

Tsopelas, P., & Constantinou, M. C. (1997). Study of elastoplastic bridge seismic isolation system. *Journal of Structural Engineering*, 123(4), 489-498.

Wang, F. C., Hong, M. F., & Lin, T. C. (2011). Designing and testing a hydraulic inerter. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 225(1), 66-72.

Wang, L., Shi, W., & Zhou, Y. (2019). Study on self-adjustable variable pendulum tuned mass damper. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, 28(1), e1561.

Wani, Z. R., Tantray, M., Farsangi, E. N., Nikitas, N., Noori, M., Samali, B., & Yang, T. Y. (2022). A critical review on control strategies for structural vibration control. *Annual Reviews in Control*.

Wen, H. B., Yang, Y. R., & Li, Y. D. (2023). Study on the stability of multi-span U-shaped pipe conveying fluid with complex constraints. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 203, 104911.

Wen, Y., Chen, Z., & Hua, X. (2017). Design and evaluation of tuned inerter-based dampers for the seismic control of MDOF structures. *Journal of Structural Engineering*, 143(4), 04016207.

Wolf, J. P. (1989). Soil-structure-interaction analysis in time domain. *Nuclear engineering and design*, 111(3), 381-393.

Wong, W. O., & Cheung, Y. L. (2008). Optimal design of a damped dynamic vibration absorber for vibration control of structure excited by ground motion. *Engineering Structures*, 30(1), 282-286.

Wu, J. H., Zhu, H. Z., Sun, Y. D., Yin, Z. Y., & Su, M. Z. (2021). Reduction of flexural vibration of a fluid-filled pipe with attached vibration absorbers. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 194, 104525.

Wu, J. S., & Shih, P. Y. (2001). The dynamic analysis of a multispan fluid-conveying pipe subjected to external load. *Journal of sound and vibration*, 239(2), 201-215.

Wu, J., Chen, G., & Lou, M. (1999). Seismic effectiveness of tuned mass dampers considering soil–structure interaction. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 28(11), 1219-1233.

Xiao, Y., Wen, J., & Wen, X. (2012). Broadband locally resonant beams containing multiple periodic arrays of attached resonators. *Physics Letters A*, 376(16), 1384-1390.

Xiao, Y., Wen, J., Wang, G., & Wen, X. (2013). Theoretical and experimental study of locally resonant and Bragg band gaps in flexural beams carrying periodic arrays of beam-like resonators. *Journal of Vibration and Acoustics*, 135(4), 041006.

Xiao, Y., Wen, J., Yu, D., & Wen, X. (2013). Flexural wave propagation in beams with periodically attached vibration absorbers: Band-gap behavior and band formation mechanisms. *Journal of Sound and Vibration*, 332(4), 867-893.

Xiaoming, L. (1989). Optimization of the stochastic response of a bridge isolation system with hysteretic dampers. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 18(7), 951-964.

Xu, K., & Igusa, T. (1992). Dynamic characteristics of multiple substructures with closely spaced frequencies. *Earthquake engineering & structural dynamics*, 21(12), 1059-1070.

Xu, K., Bi, K., Han, Q., Li, X., & Du, X. (2019). Using tuned mass damper inerter to mitigate vortex-induced vibration of long-span bridges: Analytical study. *Engineering Structures*, 182, 101-111.

Xu, K., Bi, K., Han, Q., Li, X., & Du, X. (2019). Using tuned mass damper inerter to mitigate vortex-induced vibration of long-span bridges: Analytical study. *Engineering Structures*, 182, 101-111.

Xu, Y., Liu, Z., Zhou, D., Tian, J., & Zhu, X. (2022). Vibration characteristics of pressure pipelines at pumping stations and optimized design for vibration attenuation. *Water Supply*, 22(1), 990-1003.

Yang, J. N., Danielians, A., & Liu, S. C. (1991). Aseismic hybrid control systems for building structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 117(4), 836-853.

Yeh, C. H., & Wen, Y. K. (1990). Modeling of nonstationary ground motion and analysis of inelastic structural response. *Structural safety*, 8(1-4), 281-298.

Yu, D., Wen, J., Zhao, H., Liu, Y., & Wen, X. (2008). Vibration reduction by using the idea of phononic crystals in a pipe-conveying fluid. *Journal of Sound and vibration*, 318(1-2), 193-205.

Yu, J. K., Wakahara, T., & Reed, D. A. (1999). A non-linear numerical model of the tuned liquid damper. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 28(6), 671-686.

Yuan, J. R., & Ding, H. (2023). An out-of-plane vibration model for in-plane curved pipes conveying fluid. *Ocean Engineering*, 271, 113747.

Zhang, S. Y., Neild, S., & Jiang, J. Z. (2020). Optimal design of a pair of vibration suppression devices for a multi-storey building. *Structural Control and Health Monitoring*, 27(3), e2498.

Zhang, X. L., Gao, Q., & Nie, J. (2018). The mem-inerter: A new mechanical element with memory. *Advances in Mechanical Engineering*, 10(6), 1687814018778428.

Zhang, X. L., Geng, C., Nie, J. M., & Gao, Q. (2020). The missing mem-inerter and extended mem-dashpot found. *Nonlinear Dynamics*, 101, 835-856.

Zhang, Z., & Fitzgerald, B. (2020). Tuned mass-damper-inerter (TMDI) for suppressing edgewise vibrations of wind turbine blades. *Engineering Structures*, 221, 110928.

Zhang, Z., & Fitzgerald, B. (2020). Tuned mass-damper-inerter (TMDI) for suppressing edgewise vibrations of wind turbine blades. *Engineering Structures*, 221, 110928.

Zhang, Z., & Høeg, C. (2021). Inerter-enhanced tuned mass damper for vibration damping of floating offshore wind turbines. *Ocean Engineering*, 223, 108663.

Zhou, F. L., Yang, Z., Liu, W. G., & Tan, P. (2004, August). New seismic isolation system for irregular structure with the largest isolation building area in the world. In 13th World Conference on Earthquake Engineering (pp. 1-11).

Zhou, K., Yi, H. R., Dai, H. L., Yan, H., Guo, Z. L., Xiong, F. R., ... & Wang, L. (2022). Nonlinear analysis of L-shaped pipe conveying fluid with the aid of absolute nodal coordinate formulation. *Nonlinear Dynamics*, 107, 391-412.

Zhu, B., Guo, Y., Zhao, T., & Li, X. (2023). Nonlinear dynamics of inclined viscoelastic pipes subjected to pulsatile flow and multi-harmonic excitations. *Nonlinear Dynamics*, 1-27.

Zhu, R., Liu, X. N., Hu, G. K., Sun, C. T., & Huang, G. L. (2014). A chiral elastic metamaterial beam for broadband vibration suppression. *Journal of Sound and Vibration*, 333(10), 2759-2773.

Zilletti, M. (2016). Feedback control unit with an inerter proof-mass electrodynamic actuator. *Journal of Sound and Vibration*, 369, 16-28.

Zuo, H., Bi, K., & Hao, H. (2020). A state-of-the-art review on the vibration mitigation of wind turbines. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 121, 109710.

Zuo, L. (2009). Effective and robust vibration control using series multiple tuned-mass dampers.

Zuo, L., & Nayfeh, S. A. (2004). Minimax optimization of multi-degree-of-freedom tuned-mass dampers. *Journal of Sound and Vibration*, 272(3-5), 893-908.

Zuo, L., & Nayfeh, S. A. (2005). Optimization of the individual stiffness and damping parameters in multiple-tuned-mass-damper systems. *J. Vib. Acoust.*, 127(1), 77-83.